

О волновой природе космологических сил отталкивания

А. В. Клименко^{1,*} и В. А. Клименко^{2,1}

¹ООО «Бизнес и Технологии», Челябинск, Россия

²«Челябинский государственный университет», Челябинск, Россия

Предложены уточненные уравнения общей теории относительности, описывающие не только силы гравитации, но и космологические силы отталкивания, как геометрические по своей природе.

Эти уравнения использованы для получения космологических уравнений Фридмана, описывающих динамику однородной изотропной Вселенной с учетом геометрических космологических сил отталкивания. Предложена космологическая модель Вселенной, основанная на этих уравнениях. Рассмотрены приложения модели для объяснения наблюдений.

Ключевые слова: космология, общая теория относительности, эйнштейновские уравнения, силы отталкивания.

PACS numbers: 04.20.-q, 96.10.+i

* alklimenko@gmail.com

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Стандартное описание динамики $3R$ -миров	5
2.1. Исходные уравнения	5
2.2. Замечания о Λ -члене	6
2.3. Геометрия $3R$ -мира	7
2.4. Космологические уравнения Фридмана для $3R$ -мира	8
3. Динамика $3R$ -миров с учетом космологических сил отталкивания	10
4. Учет малой примеси нерелятивистских частиц в космической среде	13
4.1. Двухкомпонентная модель космической среды	13
4.2. С-модель	15
5. Объяснение космологических наблюдений	18
5.1. Зависимость «видимая звездная величина — красное смещение» для сверхновых типа Ia	18
5.2. Анизотропия реликтового излучения	20
5.3. Возраст Вселенной	21
6. Результаты	22
Список литературы	26

1. ВВЕДЕНИЕ

В однородной изотропной Вселенной, в процессе космологического расширения в сопутствующей системе отсчета, длины волн λ свободных частиц меняются пропорционально масштабу Вселенной a :

$$\lambda \sim a. \quad (1)$$

Соотношение (1) имеет чисто геометрическую природу. По-видимому, первыми о справедливости соотношения (1) говорили Паули (1958) [1] и Уилер (1960) [2]. В современной космологии это утверждение является одним из основополагающих (см., например, [3–6]).

Длина волны λ и импульс P свободных частиц связаны соотношением де-Бройля:

$$\lambda = h/P, \quad (2)$$

где h – постоянная Планка.

При увеличении длины волны свободных частиц, уменьшается их энергия, которую будем далее называть волновой. Эту энергию определяем формулой:

$$E_\lambda = [m^2 c^4 + h^2 c^2 / \lambda^2]^{\frac{1}{2}} - mc^2, \quad (3)$$

где m – масса покоя частиц, а c – скорость света.

Плотность волновой энергии любой компоненты космической среды:

$$\varepsilon_\lambda = nE_\lambda, \quad (4)$$

n – плотность частиц рассматриваемой компоненты.

В настоящей работе высказывается следующая гипотеза. Считаем, что уменьшение, в процессе космологического расширения Вселенной, волновой энергии частиц космической среды, имеющее чисто геометрическую природу, одновременно сопровождается равным увеличением кинетической энергии частиц, связанной с расширением Вселенной. Увеличение кинетической энергии радиального разлета космической среды, относительно любого типичного наблюдателя сопутствующей системы координат, трактуем как происходящее за счет действия космологических сил отталкивания. Считаем, что источником этих сил отталкивания является кинетическая часть тензора энергии-импульса космической среды. Чтобы эта гипотеза не нарушала ковариантности урав-

нений Эйнштейна, считаем, что источником сил отталкивания является не просто волновая энергия космической среды, а вся кинетическая часть тензора энергии-импульса.

Стандартные уравнения Эйнштейна не содержат эту энергию как источник космологических сил отталкивания. Считаем, что вследствие этого, необходимо их уточнение. Согласно высказанной выше гипотезе, волновая энергия космической среды является источником не только гравитационных полей притяжения, что обычно предполагается, но одновременно и источником космологических сил отталкивания.

В настоящей работе действие космологических сил, связанных с изменением волновой энергии частиц, рассмотрено на двух примерах. В первом рассматривается динамика однородного изотропного мира заполненного релятивистскими частицами, имеющими нулевую массу покоя. Этот мир обозначаем как $3R$ -мир (R —*Realistic*). Модель $3R$ -мира является хорошим приближением для описания динамики Вселенной в радиационно-доминированную эпоху (RD -эпоху) [3–6]. Во втором примере модель $3R$ -мира усложнена за счет учета в космической среде примеси нерелятивистских частиц. Предполагается, что в процессе расширения $3R$ -мира общее количество таких частиц сохраняется, и их на много порядков меньше, чем релятивистских.

Модель $3R$ -мира с малой примесью нерелятивистских частиц является хорошим приближением для описания динамики Вселенной, при температуре космической среды $T \ll T_e$, где $T_e = m_e c^2 / k_B$ - пороговая температура для рождения электронно-позитронных пар ($T_e \approx 6 \cdot 10^9 K$) [3–6].

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 динамика $3R$ -миров рассмотрена стандартным, для современной космологии, способом. Эта же динамика, но с учетом действия космологических сил отталкивания, обусловленных изменением волновой энергии космической среды, исследована в разделе 3. В разделе 4 динамика $3R$ -миров рассмотрена в предположении присутствия в них нерелятивистских частиц. Рассматриваются температуры, когда процессы рождения и уничтожения частиц можно не учитывать. Применение уточненных уравнений Эйнштейна, для объяснения динамики Вселенной, содержится в разделе 5. В разделе 6 приведены результаты работы.

2. СТАНДАРТНОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ \mathcal{R} -МИРОВ

2.1. Исходные уравнения

Существует эпоха эволюции Вселенной (RD -эпоха), когда подавляющая часть энергии/массы космической среды содержится в её релятивистской компоненте. Считают что она состоит из фотонов и трех типов нейтрино (см., например, [6]). Хорошим приближением для описания этой эпохи является модель \mathcal{R} -миров. Предполагаем, что \mathcal{R} -миры являются однородными и изотропными, масса покоя частиц, заполняющих эти миры, равна нулю.

В этом пункте проведем исследование динамики \mathcal{R} -миров в рамках стандартных уравнений Эйнштейна:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}. \quad (5)$$

Подробности об уравнениях Эйнштейна, а также о используемых при этом обозначениях, см., например, в [3–6].

Среда предполагается идеальной. Тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ определяется формулой:

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}. \quad (6)$$

Уравнение связывающее ε и P , зависят от термодинамических свойств рассматриваемой космической среды [3–6]. Величины, определяющие параметры релятивистской среды, заполняющей \mathcal{R} -миры, здесь и далее, обозначаем значком rad . Плотность волновой энергии этой среды, определяется формулой:

$$\varepsilon_{rad} = n_{rad} \frac{hc}{\lambda_{rad}}. \quad (7)$$

В однородном изотропном \mathcal{R} -мире $n_{rad}a^3 = const$, $\lambda_{rad} \sim a$ и поэтому плотность волновой энергии ε_{rad} и масштаб \mathcal{R} -мира a связаны соотношением:

$$\varepsilon_{rad} a^4 = const. \quad (8)$$

Используя модель \mathcal{R} -мира для описания эволюции Вселенной в RD -эпоху, плотность энергии ε_{rad} рассчитываем по формуле:

$$\varepsilon_{rad} = (1 + \gamma) \sigma T^4. \quad (9)$$

Постоянная

$$\sigma = 2 \frac{\pi^2 k_B^4}{30 \hbar^3 c^3}, \quad (10)$$

где k_B - постоянная Больцмана, $\hbar = h/2\pi$, c - скорость света, фактор 2 связан с наличием двух поляризаций фотонов. Коэффициент γ в формуле (9) учитывает вклад в ε_{rad} трех типов нейтрино и приблизительно равен 0,68. В (9) T - температура фотонной компоненты среды (см. [6, гл.4]).

Вследствие (8) и (9), температура T и масштаб a связаны соотношением:

$$T a = const. \quad (11)$$

Изменение в процессе расширения $\mathcal{R}R$ -мира плотности волновой энергии ε_{rad} , имеющее чисто геометрическую природу, рассматриваем как происходящее за счет работы сил волнового давления P_{rad} . Используя первое начало термодинамики:

$$d(\varepsilon_{rad}V) = -P_{rad}dV, \quad (12)$$

и учитывая, что $V \sim a^3$, находим, что при выполнении соотношения (8), давление P_{rad} определяется формулой:

$$P_{rad} = \frac{1}{3}\varepsilon_{rad}. \quad (13)$$

Для релятивистской среды в $\mathcal{R}R$ -мире тензор энергии импульса:

$$T_{rad}^{\mu\nu} = P_{rad}(4u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}). \quad (14)$$

След тензора $T_{rad}^{\mu\nu}$ равен нулю.

2.2. Замечания о Λ -члене

В предельном случае исчезающе малого влияния материи на метрические свойства пространства, его динамика описывается уравнениями Эйнштейна для пустоты [7]:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что космологическая постоянная связана со скалярной кривизной пустого четырехмерного пространства-времени R формулой:

$$\Lambda = -\frac{1}{4}R. \quad (16)$$

Используя (15), легко показать [7], что кривизна R пустого четырехмерного пространства - времени является постоянной. Именно она и определяет значение космологической постоянной Λ .

В работе учитываем, что решения уравнений ОТО, в предельном случае исчезающе малого влияния материи на метрические свойства пространства, должны переходить в одно из возможных решений уравнения (15), описывающих динамику пустого трехмерного пространства.

Можно показать [7], что для пустых пространств, в предположении их однородности и изотропности, при $\Lambda \neq 0$, и $\Lambda > 0$, как это обычно предполагается [3–6], имеют место экспоненциально расходящиеся решения уравнений (15). Их интерпретация, в рамках современных физических теорий, затруднительна. В то же время, при $\Lambda = 0$, для пустых однородных пространств возможны два решения уравнений (15), являющиеся физическими и понятными. Первое из них описывает стационарное плоское трехмерное евклидово пространство, расстояние между любыми точками которого остается постоянным. Второе решение описывает равномерно расширяющееся трехмерное открытое кривое пространство радиус кривизны которого меняется со скоростью света. Считаем, что именно последнее и является физически разумным предельным состоянием пространства безгранично расширяющегося $3R$ -мира. Учитывая вышесказанное, в настоящей работе значение космологической константы полагаем равной нулю.

2.3. Геометрия $3R$ -мира

Геометрию четырехмерного пространства-времени $3R$ -мира в сопутствующей системе координат описываем метрикой [3–6]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + f(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta + d\varphi^2)], \quad (17)$$

$$f(\chi) : (\sin^2 \chi, k = +1); (\text{sh}^2 \chi, k = -1); (\chi^2, k = 0). \quad (18)$$

Параметр k определяет тип геометрии трехмерного пространства $3R$ -мира. Он может принимать значения $-1, 0, +1$. При $k = 0$, $3R$ -мир открытый и плоский. Если $k = +1$, то $3R$ -мир сферический, замкнутый, имеет конечный объем $V = 2\pi^2 a^3$. При $k = -1$, $3R$ -мир открытый, псевдосферический, см., например, [3–8].

2.4. Космологические уравнения Фридмана для $3R$ -мира

Учитывая метрику (17), из уравнений Эйнштейна (5) можно стандартным образом получить космологические уравнения Фридмана (см., например, [3]). Для $3R$ -мира, в предположении $\Lambda = 0$, они могут записаны в виде:

$$3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) = \frac{8\pi G}{c^2} \varepsilon_{rad}, \quad (19)$$

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = - \frac{8\pi G}{c^2} P_{rad}. \quad (20)$$

Эти уравнения могут быть преобразованы к виду:

$$\dot{a}^2 = -kc^2 + \frac{\tau_{rad}}{a^2}, \quad (21)$$

$$\ddot{a} = -\frac{\tau_{rad}}{a^3} = -\frac{dU_{eff}}{da}, \quad (22)$$

$$U_{eff} = -\tau_{rad}/2a^2. \quad (23)$$

Константа τ_{rad} определяется формулой:

$$\tau_{rad} = \frac{8}{3} \pi G \rho_{rad} a^4, \quad \rho_{rad} = \varepsilon_{rad}/c^2. \quad (24)$$

Уравнение (22) аналогично уравнению, описывающему одномерное движение частицы в потенциальном поле (см., например, [9]). Вид решений $a(t)$ уравнения (22) зависит от вида «потенциала» $U_{eff}(a)$, а также от значения «энергии»

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + U_{eff} = -\frac{kc^2}{2}. \quad (25)$$

График схематично изображающий функцию U_{eff} , определяемую формулой (23), изображен на *рис.1а*). Решения, соответствующие различным значениям параметра k , приведены на *рис.1б*). Согласно этим решениям $3R$ -миры рождаются в момент "Большого взрыва". В этот момент кривизна пространства и скорость её изменения бесконечны, термодинамические функции ε_{rad} и P_{rad} также принимают бесконечно большие значения. Возможны два типа решений. При $E < 0$ ($k = +1$) решение описывает динамику замкнутого $3R$ -мира, а при $E \geq 0$ ($k = 0, -1$) – открытого $3R$ -мира (см. *рис.1б*))

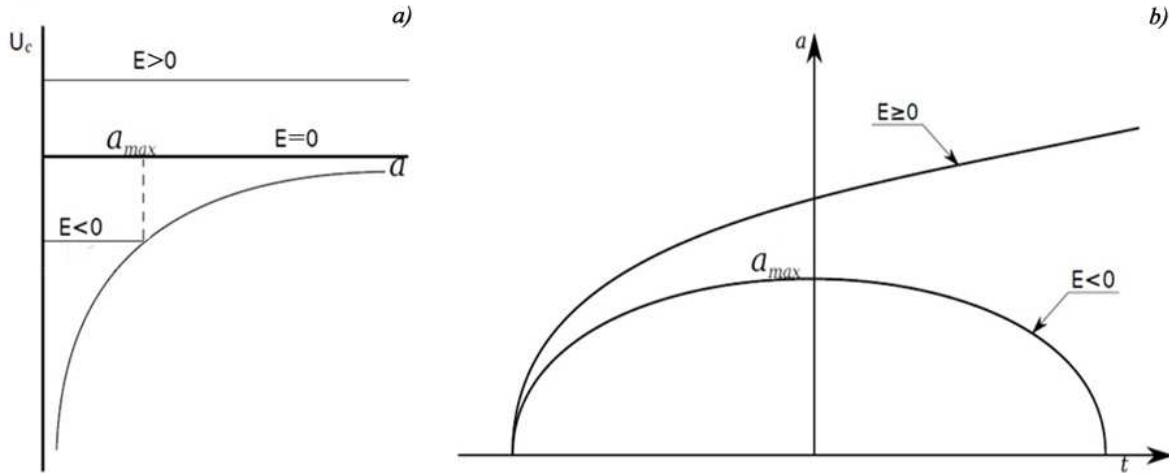


Рис. 1. а) — График функции $U_{eff}(a)$, определяемой формулой (23). б) — качественный вид решений уравнения (22), описывающих: замкнутые $3R$ -миры $E < 0$ ($k = +1$) и открытые $3R$ -миры $E \geq 0$ ($k = 0, k = -1$).

При $E = 0$ предельным состоянием трехмерного пространства $3R$ -мира является стационарное плоское пространство. Равномерно расширяющееся со скоростью света трехмерное пространство отрицательной кривизны является предельным состоянием пространства $3R$ -мира для которого $E > 0$.

Приведенные выше решения, описывающие динамику $3R$ -миров, содержат, на наш взгляд, два существенных недостатка.

- Они содержат сингулярность.
- Согласно этим решениям, уменьшение волновой энергии космической среды $3R$ -миров, сопровождается не ростом, как естественно думать в связи с законом сохранения энергии, а уменьшением энергии разлета космической среды. Не понятно куда теряется волновая энергия в процессе расширения $3R$ -миров.

Считаем, что отмеченные недостатки решений связаны с необоснованным использованием в уравнениях Эйнштейна предположения, что значение постоянной Эйнштейна [3–6] для релятивистской космической среды, как и для нерелятивистской, следует полагать равным $8\pi G/c^4$.

Гипотеза, высказанная в настоящей работе, о том, что волновая энергия космической среды является не только источником сил притяжения, но одновременно и кос-

мологических сил отталкивания, фактически содержит следующее утверждение. Для релятивистской компоненты космической среды нет основания считать, что значение постоянной Эйнштейна равно $8\pi G/c^4$. В следующих пунктах, с учетом этого замечания, уточненные уравнения Эйнштейна используются для изучения динамики Вселенной.

3. ДИНАМИКА \mathcal{R} -МИРОВ С УЧЕТОМ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ СИЛ ОТТАЛКИВАНИЯ

Считаем, что волновая часть тензора энергии-импульса является не только источником гравитационного поля, но одновременно и источником поля космологических сил отталкивания. С учетом этого уравнения Эйнштейна записываем в виде:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} - \frac{8\pi\mathbb{C}}{c^4}T_{(\lambda)}^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (26)$$

где \mathbb{C} —константа космологических сил отталкивания, $T_{(\lambda)}^{\mu\nu}$ —волновая часть тензора энергии-импульса космологической среды. Учитывая соображения приведенные в пункте 2, полагаем $\Lambda = 0$. Для релятивистской космической среды $T_{(\lambda)}^{\mu\nu} = T_{rad}^{\mu\nu}$, поэтому уравнения (26) для \mathcal{R} -мира записываем в виде:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}(1 - \alpha)T_{rad}^{\mu\nu}, \quad (27)$$

где $\alpha = \mathbb{C}/G$ некоторая константа.

Используя метрику (17), уравнения (27) стандартным образом преобразовываем в космологические уравнения Фридмана [10]:

$$\dot{a}^2 = -kc^2 + (1 - \alpha)\frac{\tau_{rad}}{a^2}, \quad (28)$$

$$\ddot{a} = -(1 - \alpha)\frac{\tau_{rad}}{a^3} = -\frac{d\bar{U}_{eff}}{da}, \quad (29)$$

где

$$\bar{U}_{eff} = -(1 - \alpha)\frac{\tau_{rad}}{2a^2}. \quad (30)$$

Эти уравнения описывают динамику \mathcal{R} -миров с учетом космологических сил отталкивания. Источником этих сил является волновая часть тензора энергии импульса. Для релятивистской среды тензор энергии импульса является полностью волновым.

Вид решений $a(t)$ уравнения (29) зависит от вида функции $\bar{U}_{eff}(a)$, а так же значения «энергии»

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \bar{U}_{eff} = -\frac{kc^2}{2}. \quad (31)$$

Чтобы получить решения, имеющие ясный и непротиворечивый физический смысл, необходимо предполагать, что значение параметра α больше единицы.

График схематично изображающий функцию \bar{U}_{eff} , для значений параметра $\alpha > 1$, приведен на *рис 2а*). Видно, что при $\alpha > 1$, решение уравнения (29) возможно лишь при $E > 0$. Это решение описывает открытые \mathcal{R} -миры ($k = -1$). Эти миры рождаются в «бесконечности». Вначале они сжимаются, достигают минимальных размеров a_m , а затем расширяясь повторяют эволюцию сжатия, но в обратном направлении (см. *рис.2б*). В состоянии $a = a_m$ космическая среда имеет максимальную температуру $T = T_m$.

При $\alpha > 1$ решение уравнения (29) с начальными условиями :

$$a(0) = a_m, \dot{a}(0) = 0, \quad (32)$$

имеет вид:

$$a(t) = \sqrt{a_m^2 + c^2 t^2}. \quad (33)$$

Решение (33) не содержит сингулярности. Согласно этому решению, скорость изменения радиуса кривизны \mathcal{R} -мира всегда меньше скорости света. Предельным состоянием трехмерного пространства \mathcal{R} -мира является состояние равномерного расширения со скоростью света. Уравнение (28) приобретает ясный смысл закона сохранения энергии. Согласно (28), полная энергия \mathcal{R} -мира в процессе его эволюции сохраняется. Она содержит три составляющих: кинетическую энергию разлета космической среды, энергию её гравитационного взаимодействия, а также волновую энергию. В (28) закон сохранения записан в расчете на единицу массы космической среды.

Изменение температуры фотонной компоненты космической среды, в \mathcal{R} -мире, описывается формулой:

$$T = T_m \frac{a_m}{a}. \quad (34)$$

О различии температур фотонной и нейтринной составляющих космической среды см., например, в [3–6].

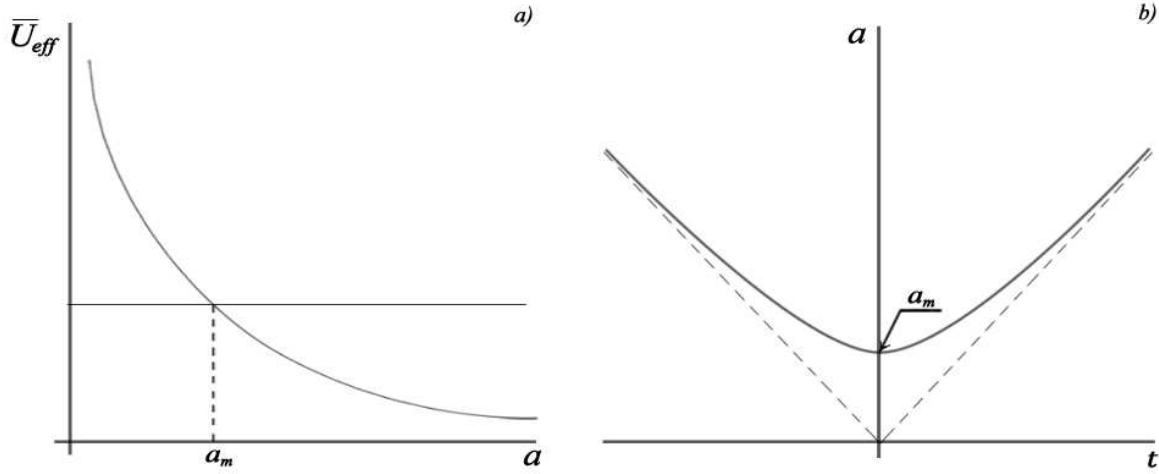


Рис. 2. а) — График функции $U_{eff}(a)$, определяемой формулой (30) и б) — решения уравнения (29) при значениях параметра $\alpha > 1$.

Параметрами, определяющими свойства $3R$ -миров, в предлагаемом нами описании являются: их минимальный масштаб a_m и максимальная температура T_m . На масштабах $a \gg a_m$, $3R$ -миры расширяются почти равномерно. Их масштабы растут со скоростью света. Хорошим приближением для описания эволюции на этих масштабах является модель равномерно расширяющейся Вселенной. Она подробно обсуждается в [11].

При $\alpha \rightarrow 1$, $a_m \rightarrow 0$, $T_m \rightarrow \infty$. Имеет место равномерное сжатие-расширение $3R$ -миров со скоростью света. Этот вариант является вырожденным.

В заключение этого пункта отметим следующее. Недостатком вариантов, в которых $\alpha \leq 1$, является наличие в решениях, описывающих динамику Вселенной, сингулярности. Вариант в котором $\alpha > 1$, на наш взгляд, является предпочтительным, поскольку в нём отсутствует сингулярность.

4. УЧЕТ МАЛОЙ ПРИМЕСИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В КОСМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

4.1. Двухкомпонентная модель космической среды

Реальная космическая среда состоит не только из релятивистских частиц. Модель $3R$ -мира является хорошим приближением для описания динамики Вселенной в RD -эпоху. Более широкую область применимости имеет модель в которой космическая среда предполагается состоящей из двух однородно перемешанных компонент: нерелятивистской и релятивистской.

В нерелятивистскую компоненту включаются все составляющие космической среды, как наблюдаемые («барионная компонента»), так и ненаблюдаемые («темная материя»), состоящие из частиц, масса покоя которых много больше их кинетической энергии. «Темная материя» является кластеризуемой и в настоящее время основной (по массе/энергии) частью материи.

В релятивистскую компоненту включаются все составляющие космической среды, как наблюдаемые (реликтовое излучение), так и ненаблюдаемые (три типа нейтрино). Уравнение состояния для этой компоненты: $P = \frac{1}{3}\varepsilon$. Она состоит из частиц, масса покоя которых равна нулю, либо много меньше их полной энергии. Считается, что релятивистская компонента не является кластеризуемой. Её современный вклад в полную энергию космической среды является малым.

В двухкомпонентной модели предполагается, что отношение концентраций частиц нерелятивистской компоненты n_M и релятивистской n_{rad} в процессе эволюции Вселенной остается постоянным. Это предположение налагает ограничение на применимость этой модели для описания реальной Вселенной. Оно выполняется в эпохи, когда температура космической среды заметно ниже пороговой температуры для рождения электрон-позитронных пар ($T \lesssim 6 \cdot 10^9 \text{K}$). Согласно наблюдательным данным $n_M/n_{rad} \approx 10^{-9}$ [3–6] и, в этом смысле, нерелятивистская компонента является малой примесью в космической среде. Значки M и rad используются, как это принято (см., например, [6]) для обозначения величин, описывающих нерелятивистскую и релятивистскую компоненты космической среды, соответственно.

Вследствие малости отношения n_M/n_{rad} , влиянием тепловой (волновой) энергии

нерелятивистской компоненты на динамику Вселенной пренебрегаем, считая эту компоненту холодной.

В модели двухкомпонентной Вселенной тензор энергии-импульса космической среды записываем в виде:

$$T^{\mu\nu} = T_M^{\mu\nu} + T_{rad}^{\mu\nu}. \quad (35)$$

Считаем, что радиационная часть тензора энергии-импульса является не только источником гравитационного поля, но одновременно и источником космологических сил отталкивания. С учетом этого, уравнения Эйнштейна описывающие динамику Вселенной в двухкомпонентной модели, записываем в виде:

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_M^{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^4}(1 - \alpha)T_{rad}^{\mu\nu}. \quad (36)$$

Уравнения (36) стандартным образом, в предположении однородности и изотропности Вселенной, преобразовываем в космологические уравнения Фридмана:

$$3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) = 8\pi G\rho_M + 8\pi G(1 - \alpha)\rho_{rad}, \quad (37)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = -\frac{8}{3}\pi G(1 - \alpha)\rho_{rad}. \quad (38)$$

При получении этих уравнений пренебрегаем тепловой энергией нерелятивистской компоненты космической среды. Считаем, что

$$P_M = 0, P_{rad} = \frac{1}{3}\varepsilon_{rad}, \varepsilon_M = \rho_M c^2, \varepsilon_{rad} = \rho_{rad} c^2. \quad (39)$$

Учитываем, что значение параметра k , определяющего тип геометрии пространства может быть равным $+1, 0, -1$.

Уравнения Фридмана (37), (38) могут быть преобразованы и записаны в виде:

$$\frac{1}{\bar{a}^2} \left(\frac{d\bar{a}}{dt} \right)^2 = -k \frac{\Omega_{curv}}{\bar{a}^2} + \frac{\Omega_M}{\bar{a}^3} + \frac{\Omega_{rad}}{\bar{a}^4} (1 - \alpha), \quad (40)$$

$$\frac{d^2\bar{a}}{dt^2} = -\frac{\Omega_M}{2\bar{a}^2} - \frac{\Omega_{rad}}{\bar{a}^3} (1 - \alpha). \quad (41)$$

где $\bar{a} = a/a_0$, $\bar{t} = t \cdot H_0$, H_0 – постоянная Хаббла. Безразмерный параметр $\alpha = \mathbb{C}/G$. Здесь и далее значок «0» используется для обозначения величин, определяющих параметры

современной Вселенной. При записи уравнений (40), (41) используются стандартные обозначения [6]:

$$\Omega_M = \frac{\rho_{M0}}{\rho_c}, \Omega_{rad} = \frac{\rho_{rad0}}{\rho_c}, \Omega_{curv} = \frac{c^2}{H_0^2 a_0^2}. \quad (42)$$

Постоянную Хаббла часто записывают в виде: $H_0 = h_0 \cdot 100$ км/с Мпк. Параметры Ω_M и Ω_{rad} определяют в единицах ρ_c современные плотности нерелятивистской и релятивистской компонент космической среды, соответственно. Величина критической плотности ρ_c определяется формулой:

$$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G = 1.88 \cdot 10^{-29} h^2 \Gamma/\text{см}^3. \quad (43)$$

Решения уравнений (40), (41) удовлетворяют начальным условиям:

$$\bar{a}(\bar{t}_0) = 1, (d\bar{a}/d\bar{t})(\bar{t}_0) = 1. \quad (44)$$

Считаем, что современной Вселенной соответствует момент времени t_0 .

4.2. С-модель

Космологическую модель Вселенной, в основе которой лежат уравнения (40), (41) называем, для краткости, С-моделью. Параметрами С-модели являются:

$$\Omega_{curv}, \Omega_M, \Omega_{rad}, k, \alpha \text{ и } h_0. \quad (45)$$

Вследствие (40), (44) они связаны соотношением:

$$-k \Omega_{curv} + \Omega_M + \Omega_{rad} (1 - \alpha) = 1. \quad (46)$$

В рамках С-модели возможны различные решения, описывающие динамику Вселенной. Для качественного анализа этих решений, уравнение (41) записываем в виде:

$$\frac{d^2 \bar{a}}{d\bar{t}^2} = -\frac{dU_C(\bar{a})}{d\bar{a}}, \quad (47)$$

где

$$U_C(\bar{a}) = -\frac{1}{2} \frac{\Omega_M}{\bar{a}} - \frac{1}{2} (1 - \alpha) \frac{\Omega_{rad}}{\bar{a}^2}. \quad (48)$$

Вид решений $\bar{a}(\bar{t})$ уравнения (47) зависит от вида потенциала $U_C(\bar{a})$, а также от значения «энергии»

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{t}} \right)^2 + U_C(\bar{a}) = -\frac{k}{2} \Omega_{curv}. \quad (49)$$

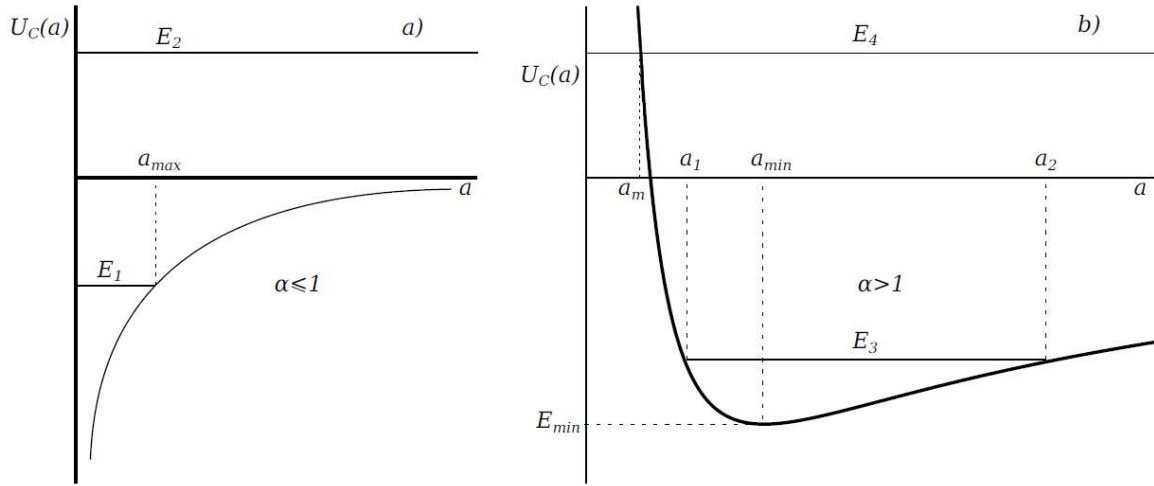


Рис. 3. Графики функции $U(a)$, определяемой формулой (48).

являющейся первым интегралом этого уравнения.

Из (49) видно, что параметр k , определяющий тип геометрии пространства, связан с «энергией» E соотношением:

$$k = -2E/c^2. \quad (50)$$

Графики схематично изображающие функцию $U_C(\bar{a})$ приведены на рис.3 Они качественно отличаются для случаев $\alpha \leq 1$ и $\alpha > 1$. Решения, описывающие динамику Вселенной в рамках С-модели, схематично изображены на рис.4.

При $\alpha \leq 1$ Вселенная рождается в момент «Большого взрыва». Силы отталкивания всегда меньше, чем силы притяжения. Расширение происходит с замедлением. При $E < 0$ Вселенная является замкнутой, а при $E \geq 0$ открытой (см. рис.4а.).

В решениях с $\alpha > 1$ сингулярность отсутствует. Согласно этим решениям существует состояние, когда Вселенная имеет минимальный масштаб и максимальную температуру. При $\alpha > 1$ и $E < 0$ Вселенная является замкнутой и осциллирующей. Возможно устойчивое стационарное состояние Вселенной с $E = E_{min}$. Решения с $\alpha > 1$ и $E \geq 0$ описывают открытую Вселенную, (см. рис.4б.).

По-видимому, интересными, с точки зрения приложения С-модели для описания Вселенной, являются решения для которых параметр α больше единицы, но очень мало от неё отличается, а энергия $E = c^2/2$. Согласно этим решениям, у Вселенной существует состояние, когда она имеет очень маленький минимальный масштаб и очень

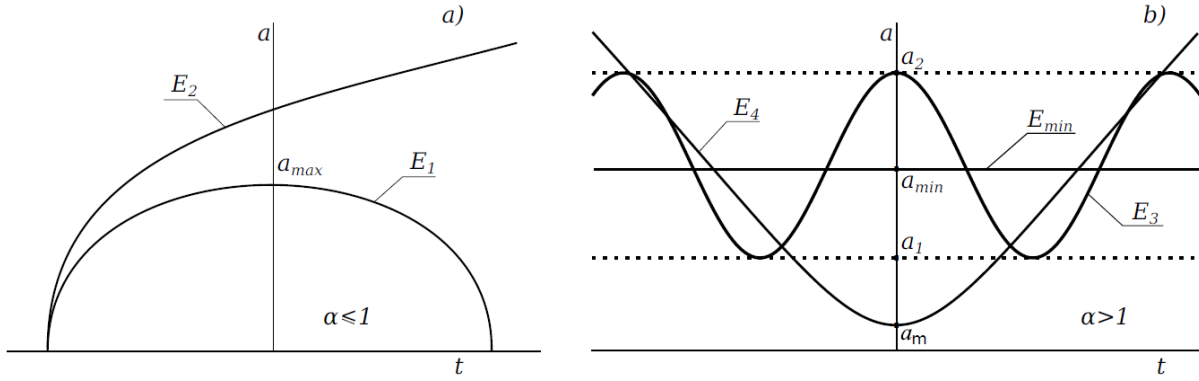


Рис. 4. Схематично приведен качественный вид решений уравнения (47) для различных значений параметра α и энергии E . Уровни энергии приведены на рис. 3

большую максимальную температуру. Расширению Вселенной предшествует сжатие. (Решения, соответствующие уровню энергии $E_4 = c^2/2$ см. рис 4b)).

При $\alpha > 1$ и $a < a_{min}$ (см. рис. 3b)), определяющую роль в ранней Вселенной играют космологические силы отталкивания. Под действием этих сил Вселенная ускоренно расширяется. При расширении силы отталкивания спадают обратно пропорционально кубу, а притяжения квадрату масштаба Вселенной. При $a > a_{min}$ определяющими динамику Вселенной становятся силы притяжения, спадающие с ростом радиуса кривизны. Эти силы не могут существенно изменить скорость расширения в области $a \gg a_{min}$. При этом, если $a_{min} \ll a_0$, то подавляющую часть времени Вселенная расширяется почти с постоянной скоростью $\dot{a}(t) \approx \dot{a}_\infty = c$. Хорошим приближением для описания её динамики в области $a \gg a_{min}$ является модель равномерно расширяющейся Вселенной (S-модель). Уравнения Фридмана, описывающие эту модель имеют предельно простой вид:

$$\dot{a} = c, \quad \ddot{a} = 0. \quad (51)$$

Учитывая (51) и начальные условия (44), заключаем, что эта модель содержит лишь один независимый параметр—постоянную Хаббла H_0 .

5. ОБЪЯСНЕНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

В этом разделе приведём объяснение некоторых наиболее важных космологических наблюдений. Для полноты и возможности сравнения, наряду с результатами полученными в рамках С-модели, приводим также соответствующие результаты, полученные в рамках Λ CDM- модели. Подробности о популярной современной космологической модели Λ CDM см., например, в [6, 12]. Величины, рассчитанные в рамках С- и Λ CDM-моделей будем обозначать индексами С и Λ , соответственно. При интерпретации наблюдательных данных считаем, что Вселенная является открытой и полагаем значение параметра k равным минус единице.

5.1. Зависимость «видимая звездная величина — красное смещение» для сверхновых типа Ia

Один из способов проверки правильности космологической модели, основан на сравнении теоретически рассчитанной в рамках этой модели и реально наблюдаемой зависимости: «видимая звёздная величина — красное смещение» для источников, чья абсолютная светимость L предполагается известной, а красное смещение z измеренным (см., например, [13–16]).

Для расчёта этой зависимости используем формулу:

$$(m - M)(z) = 5 \lg [(1 + z)\bar{r}(z)] + 5 \lg (cH_0^{-1}/l_0), \quad (52)$$

где $\bar{r}(z) = r(z)/cH_0^{-1}$, $m = -2.5 \lg E + const$, $M = -2.5 \lg E_1 + const$, $E = L / 4\pi r^2(z)(1 + z)^2$, $E_1 = L / 4\pi l_0^2$, $l_0 = 10$ пс. Шкала звёздных величин — логарифмическая, с основанием $100^{1/5} \approx 2.512$.

Фотометрическое расстояние $r(z)$ рассчитывается по формуле:

$$r(z) = a_0 sh \chi(z), \quad \chi(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{a_0(\dot{a}/a)_{z'}}. \quad (53)$$

Подробности см., например, в [3, 6]. Предполагаем, что Вселенная является открытой.

Формула, определяющая фотометрическое расстояние $\bar{r}_\Lambda(z)$ в открытой модели Вселенной имеет вид (см., например, [6, гл.4]):

$$\bar{r}_\Lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{curv}}} \operatorname{sh} \int_0^z \frac{\sqrt{\Omega_{curv}} dz'}{\sqrt{\Omega_{curv} (1 + z')^2 + \Omega_M (1 + z')^3 + \Omega_{rad} (1 + z')^4 + \Omega_\Lambda}}. \quad (54)$$

Параметры Λ CDM-модели Ω_{curv} , Ω_M , Ω_{rad} и Ω_Λ связаны соотношением:

$$\Omega_{curv} + \Omega_M + \Omega_{rad} + \Omega_\Lambda = 1. \quad (55)$$

Обычно для интерпретации наблюдений используется «плоская Λ CDM-модель» в которой полагают $\Omega_{curv} = 0$. Предсказания Λ CDM-модели с Ω_{curv} , заметно отличающимся от нуля, противоречат наблюдениям, см., например, [6]. Отметим, что результат $\Omega_{curv} \approx 0$, является лишь следствием подгонки Λ CDM-модели для объяснения наблюдений, и не более того.

Стандартная математическая процедура выбора теоретически рассчитанной зависимости $(m - M)_\Lambda(z)$, наилучшим образом описывающей наблюдательные данные по сверхновым типа Ia, показывает, что это имеет место при $\Omega_M \approx 0.27$, $\Omega_\Lambda \approx 0.73$, см. [15, 16]. Учитывая это, при расчётах используем следующие значения параметров Λ CDM-модели:

$$\Omega_{curv} = 0, \quad \Omega_M = 0.27, \quad \Omega_{rad} = (4.2/h_0^2) \cdot 10^{-5}, \quad h_0 = 0.7, \quad \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M - \Omega_{rad}. \quad (56)$$

Значения параметров Λ CDM-модели, в значительной степени, являются не результатом непосредственных измерений, а следствием их подгонки для правильного объяснения астрономических наблюдений, для которых существенны эффекты космологического расширения Вселенной.

Формулу, определяющую $\bar{r}_C(z)$ в C-модели, учитывая (40) и (53), запишем в виде:

$$\bar{r}_C(z) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{curv}}} \operatorname{sh} \int_0^z \frac{\sqrt{\Omega_{curv}} dz'}{\sqrt{\Omega_{curv} (1+z')^2 + \Omega_M (1+z')^3 + \Omega_{rad} (1-\alpha) (1+z')^4}}. \quad (57)$$

Параметры C-модели связаны соотношением:

$$\Omega_{curv} + \Omega_M + (1-\alpha)\Omega_{rad} = 1. \quad (58)$$

Оценочные расчёты показывают, что космологические наблюдения, взятые из широкой области красных смещений z , хорошо объясняются в рамках C-модели, имеющей следующие параметры:

$$\Omega_M = 0.6, \quad \Omega_{rad} = (4.2/h_0^2)10^{-5}, \quad \alpha = 1, \quad h_0 = 0.6, \quad k = -1. \quad (59)$$

На рис.5 приведены графики зависимости $(m - M)(z)$ рассчитанные в рамках Λ CDM-, C- и S- моделей. Видно, что все приведённые графики хорошо описывают наблюдаемую зависимость $(m - M)(z)$ для сверхновых типа Ia.

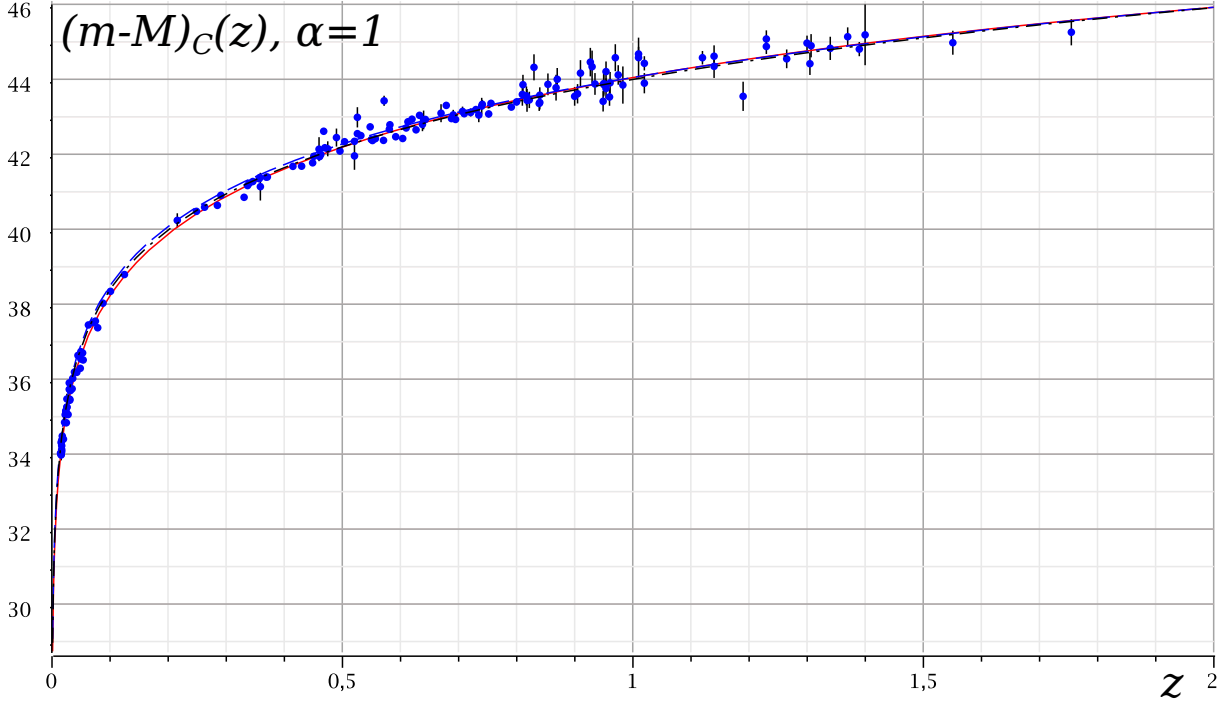


Рис. 5. Зависимость $(m - M)_C(z)$ при значении параметров (59). Для сравнения приведены графики зависимостей $(m - M)_\Lambda(z)$, для «стандартных» значений (56) и $(m - M)_S(z)$ для значения параметров $h_0 = 0.65$ и $\gamma = \sqrt{2}$ [11]. Точками на рисунке приведены наблюдаемые значения $(m - M)(z)$, вертикальными отрезками – их ошибки измерения. Наблюдательные данные взяты из [15, 16].

5.2. Анизотропия реликтового излучения

Изучение тонкой структуры реликтового излучения показывает, что на равномерном его фоне имеются незначительные отклонения, см., например, [17]. Наблюдаются слабые вариации температуры реликтового фона на уровне нескольких тысячных долей процента. Считают, что они являются свидетельством существования слабых неоднородностей, их сжатий и разрежений в космической среде в наиболее удаленную от нас эпоху, наблюдение которой современными астрономическими средствами оказывается возможным. Обычно, следуя [18, 19], считают, что эта эпоха связана с моментом рекомбинации.

Особенно интересны самые яркие пятна на картине реликтового фона. Наблюдения чётко выявляют наличие определённого угла $\Delta\theta$ между направлениями в пространстве на центры двух соседних ярких пятен. Этот угол с точностью один-два процента равен

одному градусу [17]. Соотношение между угловым и линейным размером наблюдаемого объекта зависит от вида уравнений, описывающих расширение Вселенной, а также параметров космической среды.

Предполагая, что неоднородности на равномерном фоне реликтового излучения возникли в момент рекомбинации, формулу, определяющую угол между центрами ярких пятен запишем в виде [11]:

$$\Delta\theta = \frac{2\bar{t}_{rec}(1+z_{rec})}{\bar{r}(z_{rec})} \cdot \frac{180}{\pi}. \quad (60)$$

Значение угла берётся в градусах. В формуле (60) t_{rec} , z_{rec} — возраст Вселенной и красное смещение на момент рекомбинации, соответственно.

Возраст Вселенной в момент рекомбинации \bar{t}_{rec} находим из условия:

$$\bar{a}(\bar{t}_{rec}) = a(\bar{t}_{rec})/a_0 = 1/(1+z_{rec}). \quad (61)$$

Функцию $\bar{a}(\bar{t})$ находим, решая уравнения описывающие динамику Вселенной.

В Λ CDM-модели, для значений параметров (56) и $z_{rec} = 1000$ получаем для времени рекомбинации значение $t_{rec} = 4.4 \cdot 10^5$ лет, а для угла значение $\Delta_\Lambda\theta = 1.09^\circ$, что согласуется с наблюдениями.

Для значений параметров (59) в рамках C-модели получаем:

$$\Omega_{curv} \approx 0.4, t_{rec} \approx 4.75 \cdot 10^5 \text{ лет}, \Delta_C\theta \approx 0.99^\circ. \quad (62)$$

Это расчётное значение угла $\Delta_C\theta$ также согласуется с наблюдаемым. При значениях параметров (59), C-модель хорошо объясняет и наблюдаемую зависимость $(m - M)(z)$ для сверхновых типа Ia, см. рис. 5.

5.3. Возраст Вселенной

Для определения возраста Вселенной находили решения уравнений, описывающих динамику Вселенной. В расчётах полагали, что современной Вселенной соответствует момент времени $\bar{t} = \bar{t}_0$, а минимальный размер она имела при $\bar{t} = 0$. Учитывая, что $t = \bar{t} H_0^{-1}$, возраст Вселенной t_0 определяли по формуле:

$$t_0 = \bar{t}_0 H_0^{-1}. \quad (63)$$

Проводя расчёты в рамках Λ CDM-модели, при значениях параметров (56), получили: $t_0 = 13.9 \cdot 10^9$ лет. При значениях параметров (59), расчёты в рамках С-модели дали $t_0 = 13 \cdot 10^9$ лет. Эти результаты согласуются с современными представлениями о возрасте Вселенной.

В заключение отметим следующее.

Проведение расчётов в рамках Λ CDM-, С- и S- моделей в режиме онлайн доступно на нашем сайте www.cosmoway.ru (см. раздел Моделирование). Меняя любой из параметров этих моделей, можно видеть, как это влияет на динамику Вселенной.

Применение предлагаемого инструмента для объяснения наблюдений в рамках С-модели показывает, что, по-видимому, параметры Вселенной таковы, что она подавляющую часть времени после выхода из плотного горячего состояния расширяется практически равномерно. Хорошим приближением С-модели, для описания наблюдений является модель равномерно расширяющейся Вселенной.

Применение С-модели для объяснения наблюдений, в широкой области красных смещений, показывает, что трёхмерное пространство не является плоским. Не следует также, что современная Вселенная расширяется с ускорением. Противоположные выводы получаются, если для объяснений наблюдений использовать Λ CDM- модель.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Высказано предположение, что космологические силы отталкивания имеют чисто геометрическую природу. Оно основано на следующей идее. Космологическое расширение Вселенной сопровождается увеличением длин волн частиц. В сопутствующей трёхмерной системе отсчёта длины волн частиц λ изменяются пропорционально масштабу Вселенной a . Уменьшение энергии частиц, связанное с увеличением их длин волн, имеющее чисто геометрическую природу, одновременно сопровождается увеличением кинетической энергии частиц, связанной с космологическим расширением Вселенной. Увеличение скорости расширения в сопутствующей системе отсчёта трактуем как результат действия космологических сил отталкивания. Описание этих сил в стандартных уравнениях Эйнштейна не содержится и поэтому потребовалось их уточнение.
2. Предложенное уточнение уравнений Эйнштейна заключается в следующем.

Предполагается, что константы Эйнштейна, стоящие перед статической и кинетической частями тензора энергии-импульса, не равны друг другу.

3. Наглядное объяснение природы космологических сил отталкивания дано в [10, 20, 21]. Оно заключается в следующем. Считаем, что Вселенная является нестационарной трехмерной материальной гиперповерхностью в четырехмерном пространстве. Гипотеза о четвертом крупномасштабном скрытом измерении имеет важное следствие. В четырехмерной сферической(псевдосферической) системе координат, вследствие наличия у частиц на трехмерной гиперповерхности тепловых скоростей, на каждую из них в четвертом скрытом измерении действуют центробежные силы. Они растягивают материальную гиперповерхность. В сопутствующей трехмерной системе координат эти силы проявляются как силы отталкивания. Они являются центробежными по своей природе, хотя и не связаны с вращением Вселенной как целого. Предложенная в настоящей работе «волновая» интерпретация этих сил явно не использует идею о четвертом скрытом крупномасштабном измерении. В тоже время она её содержит неявно в том месте наших рассуждений, когда мы говорим о перекачке волновой энергии частиц в кинетическую энергию их разлета.
4. Для описания в рамках ОТО космологических сил отталкивания, в тензоре энергии-импульса выделяем волновую часть. В космической среде, заполняющей Вселенную, подавляющий вклад в эту часть тензора энергии-импульса дают релятивистские частицы(фотоны и нейтрино). С учетом этого, волновую часть тензора энергии-импульса определяем формулой:

$$T_{rad}^{\mu\nu} = P_{rad} (4 u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}). \quad (64)$$

В однородной изотропной Вселенной волновое давление P_{rad} , плотность волновой энергии ε_{rad} и масштаб a связаны соотношениями:

$$P_{rad} = \frac{1}{3} \varepsilon_{rad}, \quad \varepsilon_{rad} a^4 = const. \quad (65)$$

Считаем, что тензор $T_{rad}^{\mu\nu}$ является не только источником гравитационного поля, но одновременно и источником поля космологических сил отталкивания. С учётом этого, уточненные уравнения Эйнштейна записываем в виде:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} - \frac{8\pi C}{c^4} T_{rad}^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (66)$$

где \mathbb{C} — константа космологических сил отталкивания.

5. В работе учитывается, что для того, чтобы решения уравнений (66), описывающие динамику однородной изотропной открытой Вселенной, в предельном случае переходили в физически разумные решения, описывающие динамику пустого однородного расширяющегося пространства, значение космологической постоянной необходимо полагать равным нулю.
6. Для описания однородной изотропной Вселенной обобщённые уравнения Эйнштейна преобразованы в обобщённые космологические уравнения Фридмана. Предложена космологическая модель, основанная на этих уравнениях (\mathbb{C} -модель, \mathbb{C} -centrifugal). В \mathbb{C} -модели космологические силы отталкивания обратно пропорциональны кубу масштаба Вселенной. Важную роль в этой модели играет параметр $\alpha = \mathbb{C}/G$. Он определяет соотношение сил отталкивания и притяжения в радиационно доминированную эпоху.
7. При $\alpha \leq 1$ силы отталкивания, согласно \mathbb{C} -модели, всегда меньше, чем силы притяжения. Вселенная рождается в момент «Большого взрыва» и далее расширяется с замедлением. В зависимости от значения полной энергии E , Вселенная может быть замкнутой ($E < 0$) или открытой ($E \geq 0$). Решения, описывающие \mathbb{C} -модель, при $\alpha \leq 1$, содержат особенность в поведении характерного масштаба и термодинамических параметров, определяющих свойства космической среды при $a \rightarrow 0$.
8. При $\alpha > 1$ особенность в поведении решений, описывающих \mathbb{C} -модель отсутствует. При $\alpha \geq 1$, $E < 0$ Вселенная является замкнутой и осциллирующей. Возможно устойчивое стационарное состояние. Решения с $\alpha > 1$ и $E > 0$ описывают открытую Вселенную. Согласно решениям с $\alpha > 1$ и $E > 0$, существовал момент, когда Вселенная имела минимальный масштаб и максимальную температуру. Согласно \mathbb{C} -модели, чтобы максимальная температура была достаточно высокой необходимо предполагать, что значение параметра α лишь на очень малую величину превышает единицу. Среди решений с таким значением этого параметра, как мы полагаем, и существует то, которое описывает Вселенную. Решение, описывающее динамику открытой Вселенной без сингулярности, состоит из двух симмет-

ричных ветвей. Одна из них описывает расширение Вселенной, другая — сжатие. Согласно этому решению, Вселенная рождается в «бесконечности». Вначале она сжимается до некоторого минимального размера, а затем расширяется, и снова уходит на бесконечность.

9. Согласно решениям С-модели с $\alpha = 1 + \psi$, $E > 0$, где ψ бесконечно малая положительная величина, в некоторый момент Вселенная имела очень маленький масштаб и очень высокую температуру. В это время определяющими были силы отталкивания. В результате действия этих сил, Вселенная ускоренно расширялась. При расширении силы отталкивания уменьшались обратно пропорционально кубу, а притяжения квадрату масштаба Вселенной. С течением времени определяющими в расширяющейся Вселенной стали силы притяжения. Наблюдательные данные о возрасте Вселенной, анизотропии реликтового излучения, а также зависимости «видимая звёздная величина–красное смещение» для сверхновых типа Ia, хорошо объясняются решениями С-модели, согласно которым Вселенная, за исключением относительно короткого начального периода, находится в состоянии близком к равномерному расширению. Хорошим приближением для описания её динамики является модель равномерно расширяющейся Вселенной [11].

10. Показано, что в рамках С-модели модели может быть:

- дано объяснение возраста Вселенной;
- приведена интерпретация наблюдаемой зависимости «видимая звёздная величина — красное смещение» для сверхновых типа Ia;
- объяснено наблюдаемое угловое расстояние между центрами соседних ярких пятен на равномерном фоне реликтового излучения.

Авторы выражают благодарности Жилкину А.Г. и Миллеру М.Л. за полезное обсуждение работы. Особенно мы благодарны Шухману И.Г. за многочисленные и полезные дискуссии, способствовавшие появлению этой статьи.

-
- [1] Pauli W., Theory of Relativity, 2nd ed MacMillan(Pergamon), New York, 1958.
Теория относительностиб Гостехиздат, М:—Л., 1947.
- [2] Wheeler J.A., Neutrinos, Gravitation and Geometry, Bologna, 1960.
Гравитация, нейтрино и вселенная, ИЛ, 1962.
- [3] Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. «Строение и эволюция Вселенной» (М.: Наука, 1975).
- [4] Вайнберг С. «Гравитация и космология» (М.: Платон, 2000).
- [5] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Д. «Гравитация» т.1-3 М:Мир 1977.
- [6] Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков, «Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего большого взрыва». (М., 2008).
- [7] А.В. Клименко, В.А. Клименко «Динамика пустых однородных изотропных пространств», <http://cosmoway.ru/articles/dpp.pdf>
e-Print arXiv:1206.0208v1 [physycs.gen-ph] 28 Feb 2012
- [8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Теория поля» М.:Наука 1988.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Механика» М.:Наука 1965.
- [10] А.В. Клименко, В.А. Клименко «Центробежные космологические силы отталкивания в однородной Вселенной» e-Print arXiv:1105.0815 (2011).
- [11] А.В. Клименко, В.А. Клименко, А.М. Фридман «О равномерном расширении Вселенной» *Астрономический Журнал*, т.87, №10, с.947-966 (2010)
- [12] А.Д. Чернин «Тёмная энергия и всемирное антитяготение» *УФН* 178 267, №3 2008г.
- [13] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, et al.,*Astrophys. J.* 517, 565 (1999).
- [14] A. G. Riess, A.V. Filippenko, P. Challis, et al.,*Astron. J.* 116, 1009 (1998).
- [15] P. Astier, J. Guy, N. Regnault, et al.,*Astron.and Astrophys.* 447, 31 (2006).
- [16] A. G. Riess, L.G. Strolger, S. Casertano, et al., *Astrophys. J.* 656, 98 (2007); e-Print arXiv: astro-ph/0611572 (2006).
- [17] G. Hinshaw, M.R. Nolta, C.L. Bennett, et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 170, 377 (2007).
- [18] Лифшиц Е.М. *ЖЭТФ* 16, 587 (1946).
- [19] Лифшиц Е.М., Халатников И.М., *УФН* 80, 391 (1963а).
- [20] А.Г. Жилкин, В.А. Клименко, акад. РАН А.М. Фридман «Об эйнштейновских силах отталкивания» *Доклады Академии Наук*, т435, №6 (2010).

- [21] А.Г. Жилкин, В.А. Клименко, А.М. Фридман «Динамика трёхмерных однородных изотропных релятивистских миров» *Астрономический журнал* (2011).