Вестник Челябинского государственного университета. 2013. №19 (310)
Физика. Вып. 17. С. 66–71

ВАКУУМ И ГРАВИТАЦИЯ

А. В. Клименко, В. А. Клименко

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ВАКУУМА

Показано, что в отсутствие обычных форм материи существует семь типов решений, описывающих в рамках общей теории относительности (ОТО) геометрические свойства однородных изотропных трёхмерных пространств. Решение уравнений ОТО, описывающее динамику однородной изотропной Вселенной, в предельном случае исчезающе малого влияния обычной материи на метрические свойства пространства-времени, должно переходить в одно из них.

Ключевые слова: *космология, общая теория относительности, уравнения Эйнштейна, Λ-член, вакуум.*

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются геометрические свойства Вакуума. Термином «Вакуум» обозначаем идеализированную однородную изотропную Вселенную, в которой отсутствует обычные формы материи: «барионная компонента», состоящая из электронов, протонов и нейтронов; «релятивистская компонента», состоящая из фотонов и нейтрино; а также «тёмная материя», состоящая из частиц, физическая природа которых пока понятна не вполне [1; 2].

Геометрические свойства четырёхмерного пространства-времени описываются метрикой

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{1}$$

Метрические коэффициенты $g_{\mu\nu}$ являются функциями пространственно-временных координат $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ (см., например, [3–6]). В основе ОТО лежит гипотеза о взаимосвязи гравитационного поля и метрических свойств пространства-времени. Функции $g_{\mu\nu}$ дают описание этого поля.

В основополагающей работе «Основы общей теории относительности» (1916 г.) [8] Эйнштейн показал, что уравнения, описывающие гравитационное поле в вакууме (областях пространства, свободных от обычных форм материи), могут быть записаны в виде

$$B_{\mu\nu} + \lambda\, g_{\mu\nu} B = 0, \tag{2}$$

где λ — некоторая константа; $g^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = B$ — след тензора Эйнштейна $B_{\mu\nu}$; $B_{\mu\nu}$ — симметричный тензор, полученный свёрткой из тензора кривизны Римана $R^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$:

$$B_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}. \tag{3}$$

Тензор $B_{\mu\nu}$ может быть записан в виде

$$B_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu}, \tag{4}$$

где $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, а R — его след (см., например, [3–6]). Тензор Риччи имеет вид

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}. \tag{5}$$

Символы Кристофеля $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ определяются формулой

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta,\mu\nu} = = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right). \tag{6}$$

Эйнштейн полагал, что с выбором уравнений гравитационного поля в виде (2) связан минимум произвола, поскольку, кроме $B_{\mu\nu}$, нет другого тензора 2-го ранга, который был бы составлен из метрического тензора

$g_{\mu\nu}$ и его производных, не содержал бы производных более высокого порядка, чем второй, и был бы линейным относительно последних.

Эйнштейн считал (см, [8]), что уравнения (2) для гравитационного поля в вакууме сводятся к уравнениям

$$B_{\mu\nu} = 0. \tag{7}$$

В общем случае это не так. При выполнении (7) уравнения (2) выполняются автоматически. В тоже время не все решения уравнений (2) являются решениями (7). В случае однородных изотропных пространств возможны два решения уравнений (7). Первое описывает плоское однородное трёхмерное стационарное пространство, расстояние между любыми точками которого остаётся постоянным. Второе — кривое открытое однородное трёхмерное пространство, радиус кривизны которого увеличивается (уменьшается) со скоростью света. В настоящей работе покажем, что уравнения (2) для Вакуума имеют и другие решения.

Пространства в Вакууме рассматриваем как предельный случай пространств реальной Вселенной, заполненных обычной материей при стремлении её плотности к нулю. В этом случае решения, описывающие однородные изотропные пространства в Вакууме, являются предельными для решений, описывающих динамику однородных изотропных пространств Вселенной. В связи с этим важно знать свойства этих предельных решений.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Космологические уравнения Фридмана

Используя соотношение (4), находим, что след тензора Эйнштейна $B = -R$, где R — след тензора Риччи. Учитывая это, из уравнений (2) находим

$$R(1 + 4\lambda) = 0. \tag{8}$$

Значение коэффициента перед параметром λ равно четырём и это связано с четырёхмерностью пространства-времени. Из (8) следует, что при всех $\lambda \neq -0,25$, скалярная кривизна четырёхмерного пространства-времени R равна нулю и уравнения (2) приводятся к стандартным уравнениям Эйнштейна для вакуума

$$R^{\nu}_{\mu} = 0. \tag{9}$$

В тоже время, как видно из (8), при $\lambda = -0,25$ пространство-время в вакууме может иметь скалярную кривизну R отличную от нуля. Это означает, что при $\lambda = -0,25$ могут существовать решения уравнений (2), не являющиеся решениями уравнений (9).

Покажем, что скалярная кривизна R в вакууме не может быть переменной величиной. Взяв ковариантную производную от левой части уравнения (2) и учитывая, что

$$\nabla_{\nu}\left(R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}R\,\delta^{\nu}_{\mu}\right) = 0 \tag{10}$$

(см., например, [1; 3]), находим

$$\frac{\partial R}{\partial x^{\mu}} = 0. \tag{11}$$

Это означает, что при $\lambda = -0,25$ скалярная кривизна четырёхмерного пространства-времени R в вакууме хотя и может быть не равной нулю, но является постоянной величиной. В тоже время отметим, что это вовсе не означает, что кривизна соответствующего трёхмерного пустого пространства остаётся постоянной.

В случае, когда скалярная кривизна R отлична от нуля, используя обозначение

$$\Lambda = -\frac{1}{4}\,R, \tag{12}$$

уравнение (2), учитывая (4), запишем в виде

$$R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}R\,\delta^{\nu}_{\mu} = \Lambda\,\delta^{\nu}_{\mu}. \tag{13}$$

Это уравнение является уравнением Эйнштейна с Λ-членом для вакуума. Константа Λ называется космологической постоянной (см., например, [4; 7]). Эйнштейн трактовал Λ-член как описывающий неустранимую кривизну пространства-времени. В настоящей работе мы придерживаемся этой точки зрения.

Найдём решения уравнений (2) для Вакуума. Предполагаем, что в рассматриваемом случае соответствующие трёхмерные пространства являются однородными и изотропными.

Для описания геометрии однородных изотропных нестационарных трёхмерных пространств удобно исходить из геометрической аналогии, рассматривая эти пространства как однородные и изотропные трёхмерные гиперповерхности в четырёхмерном пространстве (см., например, [3]). Геометрия этих трёхмерных однородных изотропных пространств определяется параметром k, а также масштабным фактором a, который часто называют радиусом кривизны.

Параметр k может принимать три значения: $k = -1,\ 0,\ +1$. При $k = +1,\ -1,\ 0$ реализуются случаи трёхмерных пространств положительной, отрицательной и нулевой кривизны, соответственно. В нестационарных пространствах радиусы их кривизны a изменяются во времени. Метрику четырёхмерного пространства-времени, соответствующую рассматриваемым трёхмерным пространствам, можно записать в виде

$$\begin{gathered} ds^2 = c^2 dt^2 - \\ -a^2(t)\left\{d\chi^2 + f(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right\}, \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin^2\chi & \text{при } k = +1, \\ \operatorname{sh}^2\chi & \text{при } k = -1, \\ \chi^2 & \text{при } k = 0 \end{cases} \tag{15}$$

(подробности см., например, в [3; 4]).

Используя метрику (14), уравнения (2) стандартным образом преобразуем в космологические уравнения Фридмана:

$$3\left(\frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}\right) + 6\lambda\left(\frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\ddot a}{a}\right) = 0, \tag{16}$$

$$2\frac{\ddot a}{a} + \frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} + 6\lambda\left(\frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\ddot a}{a}\right) = 0. \tag{17}$$

Уравнения (16), (17) совместны при выполнении условия

$$\ddot a a - \dot a^2 - kc^2 = 0. \tag{18}$$

Формула, определяющая скалярную кривизну R четырёхмерного пространства-времени через масштабный фактор $a(t)$, имеет вид

$$R = -\frac{6}{c^2 a^2}(kc^2 + a\ddot a + \dot a^2). \tag{19}$$

2.2. Трансформационные свойства уравнений Фридмана

Отметим, что уравнения Фридмана (16), (17) не меняются при преобразованиях вида: $a \to -a$; $t \to -t$; $t \to t + \Delta t$, где Δt — константа. Этот результат является ожидаемым, поскольку в уравнение (14), которое определяет метрику пространства, масштабный фактор $a(t)$ входит в квадрате, а время t не входит явно.

3. ПЛОСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ТРЁХМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ВАКУУМА

3.1. Плоское трёхмерное стационарное пространство

При $k = 0$ и значении параметра $\lambda = 0$, решением уравнений (16), (17), удовлетворяющим условию (18), является функция

$$a = a_0 = \text{const}. \tag{20}$$

Это решение описывает стационарное плоское трёхмерное пространство, расстояние между любыми точками которого остаётся постоянным. Скалярная кривизна R четырёхмерного пространства-времени в этом случае равна нулю.

3.2. Плоские трёхмерные инфляционные пространства

Кроме стационарного решения (20), при значении параметра $\lambda = -0,25$ уравнения (16), (17) для плоского трёхмерного пространства имеют нестационарные решения

$$a(t) = a_0 \exp\left(\pm\frac{t}{t_0}\right), \tag{21}$$

где $a_0 = ct_0$, t_0 — свободный параметр.

Решения со знаком плюс описывают экспоненциально расширяющиеся, а со знаком минус сжимающиеся плоские пространства. Функции (21) не являются решениями стандартных уравнений Эйнштейна (9). Они являются решениями уравнений Эйнштейна с Λ-членом (13). Взаимосвязь между характерным временем t_0 и космологической постоянной Λ определяется формулой

$$\Lambda = \frac{3}{c^2\, t_0^2}. \tag{22}$$

Согласно решениям (21), относительные скорости сближения (разлёта) точек этих трёхмерных пространств могут быть сверхсветовыми.

Замечание. В настоящей работе факт экспоненциальной расходимости масштабного фактора $a(t)$ определяем словом инфляция.

4. ОДНОРОДНЫЕ КРИВЫЕ ТРЁХМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ВАКУУМА

При значении параметра $\lambda = -0,25$ трёхмерные однородные пространства могут быть не только плоскими, но и кривыми. Параметр k, определяющий тип геометрии этих пространств, может принимать значения $+1$ и -1.

При $k = +1$ кривое трёхмерное однородное изотропное пространство имеет конечный объем и является замкнутым. Кривые однородные трёхмерные пространства бесконечного объёма являются открытыми и описываются метрикой (14), в которой параметр $k = -1$. Найдем решения уравнений (16), (17), соответствующие случаям $k = -1$, $\lambda = -0,25$ и $k = +1$, $\lambda = -0,25$.

4.1. Открытые однородные трёхмерные кривые пространства

4.1.1. Равномерно расширяющееся (сжимающееся) открытое пространство

При $k = -1$ условие (18) выполняется, если радиус кривизны

$$a(t) = |c\, t|\,. \tag{23}$$

Функция (23) описывает равномерное расширение (сжатие) однородного трёхмерного открытого кривого пространства со скоростью света. Она удовлетворяет уравнениям (16), (17) в случае, когда скалярная кривизна $R = 0$, а, следовательно, значение космологической постоянной $\Lambda = 0$.

4.1.2. Осциллирующие трёхмерные пространства

Кроме решений (23), при $k = -1$ имеются и другие решения уравнений (16), (17), удовлетворяющие условию (18). Они описывают осциллирующие однородные трёхмерные открытые кривые пространства. Эти решения имеют вид

$$a(t) = a_{\max} \left| \sin \frac{t}{t_1} \right|, \tag{24}$$

где $a_{\max} = c\, t_1$, t_1 — свободный параметр. Имеется бесконечное множество таких решений. Они отличаются амплитудами $a_{\max}$ и периодами колебаний $T = \pi\, t_1$.

В случае, когда радиус кривизны a определяется формулой (24), скалярная кривизна

$$R = \frac{12}{a_{\max}^2} > 0, \tag{25}$$

а космологическая постоянная $\Lambda = -3/a_{\max}^2 < 0$. Решения (24) являются вполне физичными. Остаётся лишь понять физический смысл Λ-члена.

4.1.3. Открытые инфляционные пространства

При $k = -1$ и $\Lambda > 0$ решения, описывающие открытые однородные пространства, имеют вид

$$a = a_2 \left| \operatorname{sh} \frac{t}{t_2} \right|, \tag{26}$$

где $a_2 = c\, t_2$, t_2 — свободный параметр. Космологическая постоянная Λ и характерное время t_2 связаны соотношением

$$\Lambda = \frac{3}{c^2\, t_2^2}. \tag{27}$$

4.1.4. Особая точка решений

Все три типа решений, описывающие открытые однородные трёхмерные пространства, содержат точку $a = 0$. Значение $a = 0$ является допустимым в решениях уравнений Фридмана (16), (17). В тоже время не совсем ясно, что происходит с пространством при a, обращающемся в ноль. Возможно, что в этот момент происходит уничтожение пространства и рождение нового. Полагаем, что в этом случае естественно продолжать решение далее, предполагая, что «новое» пространство продолжает эволюцию «старого».

4.2. Замкнутые инфляционные трёхмерные однородные пустые пространства

При $k = +1$ уравнения (16), (17) имеет решения

$$a = a_{\min}\, \mathrm{ch}\, \frac{t}{t_3}, \tag{28}$$

где $a_{\min} = t_3 c$, t_3 — свободный параметр. Область существования решений: $-\infty < t < +\infty$. Они удовлетворяют начальным условиям

$$a(0) = a_{\min},\ \dot{a}(0) = 0. \tag{29}$$

Согласно (28), замкнутые однородные трёхмерные пространства, рождаясь в бесконечности, сжимаются до некоторого минимального объёма, а затем, обратимым образом расширяясь, снова уходят на бесконечность. В любой момент времени t объём трёхмерного пространства конечен и определяется формулой:

$$V = 2\,\pi^2 a^3(t) \tag{30}$$

(см., например, [3]). Функция (28) является решением уравнений (16), (17) лишь при значении параметра $\lambda = -0,25$. Недостаток решений (28) заключается, как и в случаях (21) и (26), в их экспоненциальной расходимости, а вследствие этого, сложности физической интерпретации этих решений. Скалярная кривизна пространств, описываемых решениями (28):

$$R = -\frac{12}{a_{\min}^2} < 0. \tag{31}$$

Соответствующее значение космологической постоянной $\Lambda = 3/a_{\min}^2 > 0$.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

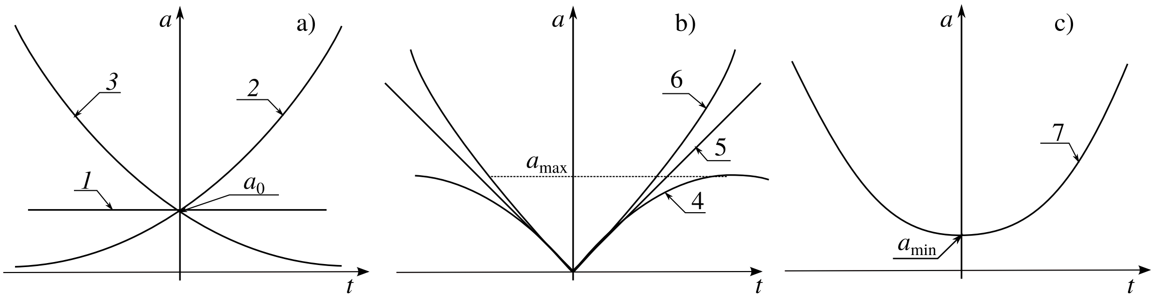
Показано, что ОТО допускает возможность существования семи типов решений, описывающих геометрические свойства однородных изотропных трёхмерных пространств Вакуума. Они могут быть не только плоскими, но также кривыми, открытыми и замкнутыми. Характер эволюции этих пространств схематично изображён на рисунке.

Динамика этих пространств описывается функциями:

$$\begin{aligned}
&1)\ a(t) = a_0 = \mathrm{const};\\
&2)\ a(t) = a_0 \exp(t/t_0),\ t_0 = a_0/c;\\
&3)\ a(t) = a_0 \exp(-t/t_0);\\
&4)\ a(t) = a_{\max} \left|\sin(t/t_1)\right|,\ t_1 = a_{\max}/c;\\
&5)\ a(t) = |c\,t|\,;\\
&6)\ a(t) = a_2 \left|\mathrm{sh}(t/t_2)\right|,\ t_2 = a_2/c;\\
&7)\ a(t) = a_{\min} \mathrm{ch}(t/t_3),\ t_3 = a_{\min}/c.
\end{aligned} \tag{32}$$

Решения уравнений ОТО, описывающие динамику однородной изотропной Вселенной, в предельном случае исчезающе малого влияния обычных форм материи материи на метрические свойства пространства, должны переходить в одно из перечисленных выше решений, описывающих динамику однородных трёхмерных пространств Вакуума.

Считаем, что физически интересными среди них являются решения 1, 4 и 5, не являющиеся инфляционными (см. рисунок). Полагаем, что правильный учёт влияния материи на свойства пространства-времени может устранить особенность в точке $a = 0$, присущую решениям 4 и 5.



Плоские (a), кривые открытые (b), и кривые замкнутые (c) пространства.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Термин «вакуум» широко используется в научно-технической литературе и имеет много различных смыслов. Приведём некоторые из них. *Технический вакуум* — разреженный газ. *Физический вакуум* — состояние квантового поля, соответствующее минимуму его энергии. *Эйнштейновские вакуумы* — решения уравнений ОТО для пустого, без обычной материи пространства. Введённый в работе термин «Вакуум» — это краткое обозначение однородных изотропных эйнштеновских вакуумов.

2. Решения, записанные в настоящей работе, описывают геометрические свойства однородного изотропного Вакуума. Эти же решения могут быть интерпретированы и как описывающие свойства Вакуума, заполненного двумя видами вакуумных форм материи: тёмной энергии и гравитационно-нейтральной материи (см. [9]). Согласно последней интерпретации, Вакуум не бывает пустым.

В ОТО физика и геометрия тесно взаимосвязаны. Обе интерпретации дополняют друг друга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунов, Д. С. Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего большого взрыва / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. М. : ЛКИ, 2008.
2. Чернин, А. Д. Тёмная материя и всемирное антитяготение // УФН. 2008. Т. 178, № 3. С. 267–300.
3. Ландау, Л. Д. Теория Поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц М. : Наука, 1988.
4. Зельдович, Я. Б. Строение и эволюция Вселенной / Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. М. : Наука, 1975.
5. Вайнберг, С. Гравитация и космология. М. : Платон, 2000.
6. Мизнер, Ч. Гравитация : в 3 т. / Ч. Мизнер, К. Торн, Д. Уиллер. М. : Мир, 1977.
7. Эйнштейн, А. Вопросы космологии и общая теория относительности // Собр. науч. тр.: в 4 т. Т. 1. М. : Наука, 1965.
8. Эйнштейн, А. Основы общей теории относительности // Собр. науч. тр.: в 4 т. Т. 1. М. : Наука, 1965.
9. Клименко, А. В. Вакуумные формы материи / А. В. Клименко, В. А. Клименко // Вестн. Челяб. гос. ун-та. 2013. № 19 (310). Физика. Вып. 17. С. 72–77.