

## ДИНАМИКА ТРЁХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ МИРОВ

Исследована динамика однородных изотропных самогравитирующих трёхмерных миров (3-миров), заполненных излучением. Показано, что последовательное описание динамики этих миров в рамках общей теории относительности (ОТО) с учетом дополнительного крупномасштабного пространственного измерения приводит к важному эффекту. В 3-мире, кроме сил притяжения, возникают силы отталкивания. Источником этих сил является тепловая энергия излучения, заполняющего 3-мир. В четырёхмерном пространстве эти силы являются центробежными. Они действуют во внешнем для 3-мира пространственном измерении и растягивают его. Показано, что в сопутствующей системе отсчёта эти силы отталкивания являются эйнштейновскими и описываются  $\Lambda$ -членом уравнений ОТО. Установлен физический смысл космологической постоянной.

**Ключевые слова:** космологические силы отталкивания, центробежные силы, дополнительное пространственное измерение, космологическая постоянная.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При написании метрики, описывающей геометрию однородного изотропного пространства Вселенной, для удобства предлагается рассматривать его как однородную и изотропную гиперповерхность в четырёхмерном пространстве (см., например, [1, § 111]). В то же время подчёркивается, что введение четвёртой пространственной координаты является лишь удобным способом описания геометрии однородного изотропного искривлённого трёхмерного пространства, а используемое при этом четырёхмерное пространство является фиктивным.

Ещё недавно в космологии считалось, что говорить о динамике Вселенной в связи с её расширением в ненаблюдаемом четвёртом пространственном измерении следует лишь как о формальном математическом приеме, не влекущем за собой физически наблюдаемых следствий. Например, в замечательной книге [2] утверждается, что вопрос о том, куда расширится Вселенная, не имеет смысла.

В настоящей работе рассматривается возможность включения дополнительного четвёртого крупномасштабного пространственного измерения в общую теорию относительности (ОТО) не как фиктивного и вводимого лишь для удобства, но как реально

существующего и приводящего к физически наблюдаемым эффектам. Показано, что важнейшим из них является существование космологических сил отталкивания. Введение дополнительного пространственного измерения позволяет понять природу этих сил.

Ещё сравнительно недавно считалось, что динамику Вселенной определяют силы тяготения (см., например, [1; 3]). В современной космологии утвердилось обоснованное мнение о том, что динамику Вселенной определяют не только силы тяготения, но и в не меньшей степени силы отталкивания. По-видимому, первым чётким указанием на необходимость учёта космологических сил отталкивания были наблюдательные данные о зависимости между видимой звёздной величиной и красным смещением для сверхновых типа Ia [4; 5]. Существуют и другие наблюдательные данные, объяснить которые без учёта космологических сил отталкивания проблематично (см., например, [6–12]).

В настоящее время наиболее распространённым и как полагают почти доказанным является утверждение о том, что источником космологических сил отталкивания является «тёмная энергия». Считается, что «тёмной энергией» является некоторая вакуумоподобная среда, макроскопи-

ческие свойства которой описываются Л-членом в уравнениях Эйнштейна (см., например, [6; 7; 13]).

В работах [14; 15] показано, что, кроме эйнштейновских сил отталкивания, в ОТО могут быть введены и другие космологические силы отталкивания. Рассмотрен пример космологических сил отталкивания, связанных с зависимостью тепловой энергии космической среды от радиуса кривизны Вселенной. Авторы [14; 15] полагали, что эти силы являются центробежными по своей природе.

В нашей работе [16] в рамках ОТО исследована динамика двумерных однородных гравитирующих миров (2-миров). Этот наглядный модельный пример поясняет смысл центробежных космологических сил. Показано, что в случае наличия дисперсии скоростей частиц, из которых состоит 2-мир, его динамика существенным образом зависит от наличия третьего пространственного измерения, «внешнего» по отношению к нему. Записаны уравнения, описывающие динамику 2-мира в шварцшильдовой системе координат, с учётом дисперсии скоростей частиц, заполняющих мир.

Показано, что динамика 2-мира определяется не только гравитационными силами, но также и силами отталкивания. Силы отталкивания в 2-мирах связаны с зависимостью тепловой энергии среды, заполняющей эти миры, от радиуса кривизны их пространства. В шварцшильдовой системе координат эти силы являются центробежными. Они действуют в третьем внешнем к 2-мирам пространственном измерении и растягивают их. В сопутствующей двумерной системе отсчёта эти силы проявляются как силы отталкивания.

Существенную роль в динамике 2-мира играет его гравитационный радиус  $r_g$ . Динамика 2-мира, имеющего характерные размеры  $a \sim r_g$ , принципиально отличается от динамики  $D$ -мира, описанного в [14] в ньютоновском приближении. В [17] показано, что в релятивистских 2-мирах в сопутствующей системе отсчёта силы отталкивания являются эйнштейновскими. Они описываются Л-членом уравнений ОТО. Космологическая постоянная определяется параметрами из-

лучения, заполняющего 2-мир.

В настоящей работе метод описания 2-мира, использованный в [16; 17], обобщён на трёхмерный случай. Исследована динамика центрально-симметричного релятивистского трёхмерного 3-мира, однородно заполненного излучением в пятимерном пространстве-времени. Учитывается дополнительное, «внешнее» по отношению к 3-миру, четвёртое пространственное измерение.

Рассматриваемые нами модели однородных центрально-симметричных безграничных гравитирующих систем являются вариантами космологических моделей, определяемых как «Мир на бране». В этих моделях Вселенная рассматривается как трёхмерная брана в четырёхмерном пространстве [18]. Однако в отличие от предыдущих работ (см., например, обзор [19]), посвящённых развитию различных аспектов этой модели, в нашей работе учитываются не только нормальные к бране (миру) скорости частиц космической среды, но и тангенциальные скорости.

Учёт тангенциальных скоростей позволяет описать центробежные силы, действующие на каждый элемент 3-мира во внешнем для него пространственном измерении. Показано, что с точки зрения типичного наблюдателя, находящегося в релятивистском 3-мире, как и релятивистском 2-мире, эти силы проявляются как эйнштейновские силы отталкивания.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описана динамика релятивистских 3-миров на основе космологических уравнений А. А. Фридмана. В разделе 3 построена метрика пятимерного пространства-времени для описания динамики сферических 3-миров. В разделе 4 исследована динамика релятивистских 3-миров в системе координат Тангерлини. В разделе 5 изучена динамика сферических релятивистских 3-миров в сопутствующей системе координат. В разделе 6 приведена интерпретация эйнштейновских сил отталкивания. В заключении перечислены основные результаты работы.

## 2. СТАНДАРТНОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ 3-МИРОВ

В настоящем разделе стандартным методом, основанном на космологических уравнениях А. А. Фридмана (см., например, [2; 7]), опишем динамику 3-миров в четырёхмерном пространстве-времени. Считаем, что 3-мир является центрально-симметричным и однородно заполнен чернотельным излучением. Запишем и исследуем уравнения, описывающие этот мир в сопутствующей системе координат. В этой системе координат распределение излучения является однородным и изотропным.

Уравнение состояния излучения имеет вид

$$P = \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{3}\rho c^2, \quad (1)$$

где  $P$ ,  $\varepsilon$ ,  $\rho$  — давление, плотность энергии и плотность излучения, соответственно;  $c$  — скорость света.

Величиной, характеризующей динамику однородного изотропного 3-мира, является радиус кривизны  $a(t)$ . Уравнениями, описывающими изменение во времени радиуса кривизны  $a(t)$  3-мира в сопутствующей системе координат, являются космологические уравнения А. А. Фридмана. Они являются следствием уравнений ОТО и предположения об однородности и изотропности 3-мира (см., например, [2; 3; 7]).

С учётом эйнштейновских сил отталкивания, описываемых  $\Lambda$ -членом, космологические уравнения А. А. Фридмана для рассматриваемого 3-мира могут быть записаны в виде (см., например, [2, гл. 4])

$$3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) = 8\pi G\rho + c^2\Lambda, \quad (2)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) = -\frac{8\pi G}{3}\rho + c^2\Lambda. \quad (3)$$

Точка здесь и далее обозначает производную по времени. Время в сопутствующей системе координат будем обозначать буквой  $\tau$ . Параметр  $k$  может принимать значения 0, +1 и -1. Он определяет тип геометрии пространства 3-мира. При  $k = 0$  пространство является плоским, при  $k = +1$  оно сферическое,

а при  $k = -1$  псевдосферическое. Подробности о возможных типах геометрии однородной изотропной Вселенной см., например, [2, гл. 2]. В уравнениях (2), (3)  $\Lambda$  — так называемая космологическая постоянная,  $G$  — гравитационная постоянная.

Из уравнений (2), (3) следует закон сохранения:

$$\frac{d}{da}(\rho a^2) + 2(\rho a^2)\frac{1}{a} = 0. \quad (4)$$

Соотношение (4) имеет место при любом значении постоянных  $k$  и  $\Lambda$ . Интегрируя (4), получаем

$$\rho a^4 = \rho_0 a_0^4. \quad (5)$$

Здесь и далее значок ноль характеризует величину, взятую в определённый момент времени  $\tau_0$ .

Учитывая (5) и термодинамические свойства чернотельного излучения, заключаем, что с изменением масштаба 3-мира  $a$  частота излучения  $\omega$ , температура  $T$  и плотность частиц  $n$  меняются следующим образом:

$$\omega a = \omega_0 a_0, \quad T a = T_0 a_0, \quad n a^3 = n_0 a_0^3. \quad (6)$$

Считаем, что в процессе эволюции релятивистского 3-мира сохраняются его однородность и изотропность. Темп расширения 3-мира определяется параметром Хаббла:

$$H(\tau) = \dot{a}/a. \quad (7)$$

Значение параметра Хаббла при  $\tau = \tau_0$  ( $H(\tau_0) = H_0$ ) называется постоянной Хаббла. В рассматриваемой нами задаче величина  $H_0^{-1}$  является характерным масштабом времени.

Учитывая (5), космологические уравнения А. А. Фридмана (2), (3), описывающие релятивистские 3-миры в сопутствующей системе координат, запишем в виде

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\bar{a}} \frac{d\bar{a}}{d\bar{\tau}} \right)^2 = \\ & = \left( -k\Omega_{\text{curv}} \frac{1}{\bar{a}^2} + \Omega_{\text{rad}} \frac{1}{\bar{a}^4} + \Omega_{\Lambda} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{d^2\bar{a}}{d\bar{\tau}^2} = -\frac{\Omega_{\text{rad}}}{\bar{a}^3} + \Omega_{\Lambda}\bar{a}. \quad (9)$$

При записи этих уравнений использованы безразмерные переменные  $\bar{a} = a/a_0$  и  $\bar{\tau} = \tau H_0$ . За единицу длины взята величина  $a_0$ , а за единицу времени величина  $H_0^{-1}$ . Используются стандартные обозначения [7]:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{rad}} &= \frac{\rho_0}{\rho_c}, & \Omega_{\Lambda} &= \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_c}, & \Omega_{\text{curv}} &= \frac{c^2}{H_0^2 a_0^2}, \\ \rho_c &= \frac{3H_0^2}{8\pi G}, & \rho_{\Lambda} &= \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}. \end{aligned} \quad (10)$$

В современной космологии источник сил отталкивания определяют термином «тёмная энергия». Считают, что «тёмной энергией» является некоторая вакуумоподобная среда.  $\Lambda$ -член в уравнениях ОТО даёт описание её макроскопических свойств. Предполагают, что «тёмная энергия» является однородной средой, имеющей во всех системах отсчёта постоянную, не меняющуюся во времени и пространстве, плотность  $\rho_{\Lambda}$ . «Тёмная энергия» обладает отрицательным давлением. Её уравнение состояния имеет вид (см., например, [6; 7])

$$P_{\Lambda} = -\varepsilon_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda} c^2. \quad (11)$$

Решения уравнения (9) удовлетворяют граничным условиям:

$$\bar{a}(\tau_0) = 1, \quad (d\bar{a}/d\bar{\tau})(\tau_0) = 1. \quad (12)$$

Чтобы качественно проанализировать решения уравнения (9), запишем его в виде

$$\frac{d^2 \bar{a}}{d\bar{\tau}^2} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{d\bar{a}}, \quad (13)$$

где

$$U_{\text{eff}} = -\frac{\Omega_{\text{rad}}}{2\bar{a}^2} - \frac{\Omega_{\Lambda}\bar{a}^2}{2}. \quad (14)$$

Уравнение (13) аналогично уравнению, описывающему одномерное движение частицы в потенциальном поле (см., например, [20]). Используя стандартный метод, качественно исследуем возможные типы решений уравнения (13).

Первым интегралом уравнения (13) является энергия

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{a}}{d\bar{\tau}} \right)^2 - \frac{\Omega_{\text{rad}}}{2\bar{a}^2} - \frac{\Omega_{\Lambda}\bar{a}^2}{2}. \quad (15)$$

Учитывая (12), находим

$$E = \frac{1}{2} (1 - \Omega_{\text{rad}} - \Omega_{\Lambda}). \quad (16)$$

Значение параметра  $\Omega_{\text{curv}}$  находим из (8). Учитывая (12), (15), получаем

$$k = -2E/\Omega_{\text{curv}}. \quad (17)$$

Величина  $\Omega_{\text{curv}}$  (см. (10)) не может быть отрицательной, а также равной нулю. При  $E = 0$  ( $\Omega_{\text{rad}} + \Omega_{\Lambda} = 1$ ) параметр  $k = 0$ , пространство 3-мира плоское. При  $E > 0$  ( $\Omega_{\text{rad}} + \Omega_{\Lambda} < 1$ )  $k = -1$ , пространство 3-мира псевдосферическое и имеет бесконечный объем. Случаю  $E < 0$  ( $\Omega_{\text{rad}} + \Omega_{\Lambda} > 1$ ) соответствует значение параметра  $k = +1$ . При этом пространство 3-мира является сферическим и имеет конечный объем  $V = 2\pi^2 a^3$ .

На рис. 1 качественно изображён график функции  $U_{\text{eff}}(\bar{a})$ . Приведены уровни энергий  $E$ , соответствующие различным типам решений уравнения (13).

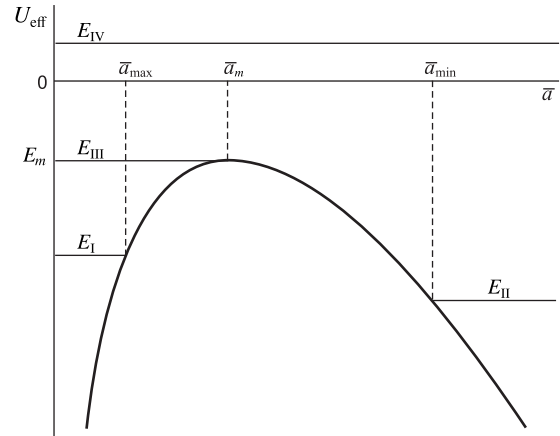


Рис. 1. График функции  $U_{\text{eff}}(\bar{a})$ , определяемой формулой (14)

На рис. 2 приведены графики, качественно описывающие решения уравнения (13) для различных значений энергии  $E$ . Значение энергии  $E$ , как видно из (16), определяется параметрами модели  $\Omega_{\text{rad}}$  и  $\Omega_{\Lambda}$ . Значения  $\bar{a}_m$  и  $E_m$ , определяющие максимум функции  $U_{\text{eff}}(\bar{a})$  (см. рис. 1), зависят также от этих параметров. Они определяются формулами

$$\begin{aligned} \bar{a}_m &= (\Omega_{\text{rad}}/\Omega_{\Lambda})^{1/4}, \\ E_m &= U_{\text{eff}}(\bar{a}_m) = -(\Omega_{\Lambda}\Omega_{\text{rad}})^{1/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Условия реализации различных типов реше-

ний уравнения (13):

$$\begin{aligned}
 \text{I} &- (E_{\text{I}} < E_m, \quad a_0 < a_m); \\
 \text{II} &- (E_{\text{II}} < E_m, \quad a_0 > a_m); \\
 \text{III} &- (E_{\text{III}} = E_m, \quad a = a_m); \\
 \text{IV} &- (E_m < E_{\text{IV}}).
 \end{aligned} \tag{19}$$

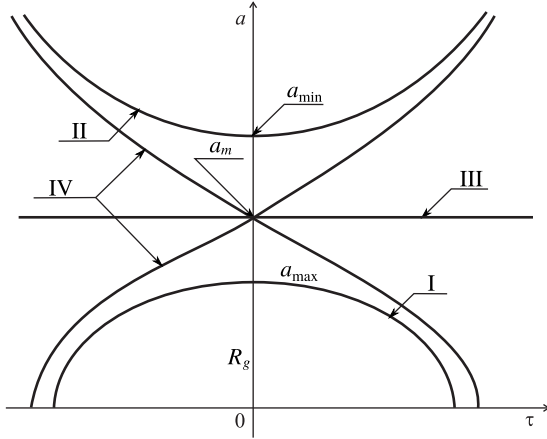


Рис. 2. Схематическое изображение графиков, описывающих различные типы решений уравнения (13)

Решения типов I, IV описывают релятивистские 3-миры, родившиеся из сингулярного состояния в результате «Большого взрыва». Решения типа I описывают модель замкнутого релятивистского 3-мира, а решения типа IV описывают модель открытого релятивистского 3-мира. Решения типа IV, кроме решений, описывающих эволюцию расширяющейся идеализированной релятивистской Вселенной, следующую за «Большим взрывом», могут описывать эволюцию сжимающейся Вселенной, заканчивающуюся «Большим схлопыванием».

При  $E = E_m$ ,  $a = a_m$  имеет место стационарное решение III. Как видно из рис. 1, оно не является гравитационно устойчивым относительно малых возмущений.

Решения типа II описывают эволюцию 3-миров без сингулярности. Родившись в бесконечности, эти миры сначала сжимаются до минимальных размеров  $a_{\min}$  (см. рис. 2), а затем неограниченно расширяются.

В заключение этого параграфа отметим следующее. Приведённое описание динамики релятивистских 3-миров основано на уравнениях, содержащих три параметра:  $H_0$ ,  $\Omega_{\text{rad}}$  и  $\Omega_{\Lambda}$ . Для объяснения смыс-

ла параметра  $\Omega_{\Lambda}$  используется предположение о гипотетической «тёмной энергии». В следующих параграфах приведено описание динамики релятивистских 3-миров, не содержащее этого предположения. Оно основано на идее, согласно которой 3-мир является физическим объектом пятимерного пространства-времени. Считаем, что четвёртое, дополнительное пространственное измерение является крупномасштабным.

### 3. МЕТРИКА ПЯТИМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ, СВЯЗАННОГО С 3-МИРОМ

Рассмотрим центрально-симметричный трёхмерный однородный изотропный безгравитационный самогравитирующий мир в четырёхмерном пространстве. Для описания динамики 3-мира используем центрально-симметричную метрику пятимерного пространства-времени. Эта метрика является аналогом метрики Шварцшильда. В общем виде она может быть записана в виде [21]

$$ds^2 = e^{2\Phi} c^2 dt^2 - e^{2\Lambda} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{20}$$

где  $\Phi = \Phi(r, t)$ ,  $\Lambda = \Lambda(r, t)$ , а

$$d\Omega^2 = d\chi^2 + \Sigma_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \tag{21}$$

В этом разделе значок  $\Lambda$  используется для обозначения функции, описывающей метрические свойства пространства-времени. Функция

$$\Sigma_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & k = +1; \\ \chi, & k = 0; \\ \text{sh } \chi, & k = -1. \end{cases} \tag{22}$$

Отметим очевидные свойства этой функции:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{d\chi^2} \Sigma_k(\chi) &= -k \Sigma_k(\chi), \\
 \left[ \frac{d}{d\chi} \Sigma_k(\chi) \right]^2 &= 1 - k \Sigma_k^2(\chi).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Используя (20), находим метрические коэффициенты  $g_{\mu\nu}$ . В пятимерном пространстве-времени индексы  $\mu$  и  $\nu$  принимают значения 0, 1, 2, 3, 4. Считаем, что

$x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \chi$ ,  $x^3 = \theta$ ,  $x^4 = \phi$ . Символы Кристоффеля  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  рассчитываются по формуле

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (24)$$

Вычисление приводит к следующим выражениям (штрих означает дифференцирование по  $r$ , а точка над буквой — дифференцирование по  $ct$ ):

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \dot{\Phi}, & \Gamma_{01}^0 &= \Phi', \\ \Gamma_{11}^0 &= e^{2(\Lambda-\Phi)}\dot{\Lambda}, & \Gamma_{00}^1 &= e^{2(\Phi-\Lambda)}\Phi', \\ \Gamma_{01}^1 &= \dot{\Lambda}, & \Gamma_{11}^1 &= \Lambda', \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{-2\Lambda}, & \Gamma_{33}^1 &= -r\Sigma_k^2 e^{-2\Lambda}, \\ \Gamma_{44}^1 &= -r \sin^2 \theta \Sigma_k^2 e^{-2\Lambda}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\Sigma_k \frac{d}{d\chi} \Sigma_k, & \Gamma_{44}^2 &= -\sin^2 \theta \Sigma_k \frac{d}{d\chi} \Sigma_k, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \frac{d}{d\chi} \ln \Sigma_k, \\ \Gamma_{44}^3 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{24}^4 &= \frac{d}{d\chi} \ln \Sigma_k, & \Gamma_{34}^4 &= \text{ctg } \theta. \end{aligned} \quad (25)$$

Логарифмическая производная

$$\frac{d}{d\chi} \ln \Sigma_k = \begin{cases} \text{ctg } \chi, & k = +1; \\ 1/\chi, & k = 0; \\ \text{cth } \chi, & k = -1. \end{cases} \quad (26)$$

По формуле

$$R_{\mu\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{\mu\beta}^{\gamma} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} \quad (27)$$

находим компоненты тензора Риччи. Они имеют вид

$$R_{00} = -e^{2\Phi-2\Lambda} \left[ \Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \frac{3\Phi'}{r} \right] + \ddot{\Lambda} + \dot{\Lambda}^2 - \dot{\Phi}\dot{\Lambda}, \quad (28)$$

$$R_{11} = -e^{2\Lambda-2\Phi} \left[ \ddot{\Lambda} + \dot{\Lambda}^2 - \dot{\Phi}\dot{\Lambda} \right] + \Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' - \frac{3}{r}\Lambda', \quad (29)$$

$$R_{22} = e^{-2\Lambda} \left[ 2 + r(\Phi' - \Lambda') \right] - 2k, \quad (30)$$

$$R_{33} = \Sigma_k^2(\chi) R_{22}, \quad (31)$$

$$R_{44} = \sin^2 \theta \Sigma_k^2(\chi) R_{22}, \quad (31)$$

$$R_{01} = -\frac{3}{r}\dot{\Lambda}. \quad (32)$$

Для определения вида функций  $\Phi(r, t)$  и  $\Lambda(r, t)$  используем уравнения Эйнштейна

для гравитационного поля. Для областей, находящихся вне 3-мира, они имеют вид

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (33)$$

Учитывая (32), заключаем, что функция  $\Lambda$  не зависит от времени. С учётом этого остальные уравнения Эйнштейна запишутся в виде

$$\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \frac{3}{r}\Phi' = 0, \quad (34)$$

$$\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' - \frac{3}{r}\Lambda' = 0, \quad (35)$$

$$2 + r(\Phi' - \Lambda') - 2ke^{2\Lambda} = 0. \quad (36)$$

Вычитая (35) из (34), находим  $\Phi' + \Lambda' = 0$ . Это означает, что

$$\Phi + \Lambda = f(t). \quad (37)$$

Выбор интервала  $ds^2$  в виде (20) оставляет ещё возможность произвольного преобразования времени вида  $t = t(t')$ . Используя свободу выбора временной координаты, можно к функции  $\Phi$  прибавить произвольную функцию времени. За счёт этого всегда в (37) можно обратить  $f(t)$  в ноль и считать, что  $\Phi + \Lambda = 0$ . Учитывая (37), из (36) находим уравнение для определения  $\Phi$ :

$$\Phi' = \frac{1}{r} (ke^{-2\Phi} - 1). \quad (38)$$

Решая его, находим

$$e^{2\Phi} = e^{-2\Lambda} = k - \frac{\text{const}}{r^2}. \quad (39)$$

Получим уравнения, описывающие динамику сферических релятивистских 3-миров (для случая  $k = +1$ ). Вывод уравнений, описывающих 3-миры, для которых  $k = 0$  и  $k = -1$ , приведены в приложении.

При  $k = +1$  во внутренней области к 3-миру (с учётом отсутствия особенности в метрике при  $r \rightarrow 0$ ) константу интегрирования в (39) полагаем равной нулю. В этой области  $\Phi = \Lambda = 0$  и метрика является галилеевой.

Во внешней области к сферическому 3-миру на больших расстояниях гравитационное поле является слабым. По аналогии с 2-миром (см. [16]), константу интегрирования

в (39) полагаем равной  $R_g^2$ , где  $R_g$  — гравитационный радиус 3-мира. Эта величина является аналогом гравитационного радиуса  $r_g$  для 2-мира.

Учитывая эти замечания, метрику пятимерного пространства-времени, внешнего по отношению к сферическому 3-миру, определяем формулой

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_g^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - R_g^2/r^2\right)} - r^2 d\Omega^2, \quad (40)$$

$$d\Omega^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (41)$$

Метрика (40) называется метрикой Тангерлини (см. [22]). Она используется нами для исследования динамики сферически-симметричных релятивистских 3-миров.

#### 4. ДИНАМИКА СФЕРИЧЕСКИХ 3-МИРОВ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ТАНГЕРЛИНИ

Как и при исследовании динамики сферических релятивистских 2-миров (см. [17]), считаем, что 3-миры состоят из частиц, имеющих массу покоя равную нулю. Они однородно заполняют трёхмерную гиперсферу переменного радиуса  $a(t)$ . В системе координат Тангерлини динамика релятивистского 3-мира описывается уравнением движения частиц по радиусу. Чтобы получить это уравнение, учитываем, что частицы движутся по геодезическим в пятимерном пространстве-времени. Уравнение геодезических имеет вид

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (42)$$

Для описания движения частиц с нулевой массой покоя введён скалярный параметр  $\lambda$ , определенным образом связанный со временем  $t$ . Формула, определяющая эту взаимосвязь, будет приведена ниже.

Компоненты  $\mu = 2$  и  $\mu = 3$  уравнения (42)

имеют вид

$$\frac{d^2 \chi}{d\lambda^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{d\lambda} \frac{d\chi}{d\lambda} - \sin \chi \cos \chi \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - \sin \chi \cos \chi \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0, \quad (43)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} + 2 \operatorname{ctg} \chi \frac{d\chi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0. \quad (44)$$

Здесь и далее  $a$  — радиальная координата частиц. Величина  $a(t)$  определяет радиус кривизны сферического 3-мира в момент времени  $t$ . Из этих уравнений следует, что если в начальный момент  $\lambda_0$ ,  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $(d\theta/d\lambda)_0 = 0$ ,  $\chi_0 = \pi/2$ ,  $(d\chi/d\lambda)_0 = 0$ , то и при всех  $\lambda \neq \lambda_0$   $\theta(\lambda) = \pi/2$ ,  $\chi(\lambda) = \pi/2$ . Это означает, что траектории рассматриваемых частиц плоские. Очевидно, что траектории и всех других частиц также плоские. Далее для простоты рассматриваем частицы, для которых  $\theta = \chi = \pi/2$ .

Полагая  $\mu = 4$ ,  $\theta = \chi = \pi/2$ , из (42) находим

$$\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0. \quad (45)$$

Интегрируя (45), получаем

$$c \cdot a^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L_\gamma. \quad (46)$$

Этот интеграл движения связан с космологическим удельным вращательным моментом частиц, который является одним из параметров, определяющих динамику релятивистских 3-миров.

Компонента уравнения (42), соответствующая  $\mu = 0$ , имеет вид

$$\frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + 2 \frac{d\Phi}{da} \frac{da}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} = 0. \quad (47)$$

Учитывая, что  $e^{2\Phi} = (1 - R_g^2/a^2)$ , (47) запишем в виде

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \left(1 - \frac{R_g^2}{a^2}\right) \frac{dx^0}{d\lambda} \right] = 0. \quad (48)$$

Отсюда находим

$$E_\gamma = c^2 \left(1 - \frac{R_g^2}{a^2}\right) \frac{dx^0}{d\lambda}. \quad (49)$$

Этот интеграл движения связан с полной удельной энергией частиц. Формула (49) определяет взаимосвязь переменных  $\lambda$  и  $t$ :

$$d\lambda = \frac{c^3 dt}{E_\gamma} \left( 1 - \frac{R_g^2}{a^2(t)} \right). \quad (50)$$

Уравнение для определения  $da/dt$  получаем следующим образом. Учитываем, что для частиц, движущихся в плоскости  $\theta = \chi = \pi/2$ , интервал  $ds^2$  имеет вид

$$ds^2 = e^{2\Phi} c^2 dt^2 - e^{-2\Phi} da^2 - a^2 d\phi^2 = 0. \quad (51)$$

Делим это уравнение на  $d\lambda^2$  и, учитывая (46), (50), находим

$$\frac{1}{(1 - R_g^2/a^2)} \frac{da}{dt} = \frac{c}{E_\gamma} [E_\gamma^2 - U_\gamma^2(a)]^{1/2}, \quad (52)$$

где

$$U_\gamma^2(a) = \frac{L_\gamma^2}{a^2} \left( 1 - \frac{R_g^2}{a^2} \right). \quad (53)$$

Формула (52) описывает движение релятивистского 3-мира в четвёртом пространственном измерении в системе координат Тангерлини.

Функция  $U_\gamma(a)$  играет роль «эффективной потенциальной энергии» в том смысле, что условием  $E_\gamma \geq U_\gamma(a)$  определяются (аналогично нерелятивистской теории) допустимые области изменения радиуса 3-мира. На рис. 3 качественно изображён график функции  $U_\gamma(a)$ , определяемой формулой (53), для значений параметра  $L_\gamma \neq 0$ . Функция  $U_\gamma(a)$  при значении  $a = a_m$  имеет максимум.

Максимуму функции  $U_\gamma(a)$ , равному  $U_\gamma(a_m) = E_{\gamma m}$ , соответствуют стационарные 3-миры. Они не являются гравитационно устойчивыми относительно малых возмущений. Совместное решение уравнений  $U_\gamma(a) = E$ ,  $dU_\gamma/da = 0$  даёт

$$a_m = \sqrt{2}R_g, \quad E_{\gamma m} = c L_\gamma / (2R_g). \quad (54)$$

Неустойчивые стационарные релятивистские 3-миры имеют радиус равный  $\sqrt{2}R_g$ . Малое возмущение их размера, связанное с его уменьшением, приводит к сжатию 3-мира до размера  $R_g$ . Радиальное возмущение неустойчивого стационарного 3-мира,

связанное с увеличением его радиуса, сопровождается его неограниченным расширением.

Если при заданном значении параметра  $L_\gamma$  размер 3-мира  $a$  и энергия  $E_\gamma$  не удовлетворяют условиям (54), то 3-мир не является стационарным. Качественный анализ возможных типов решений, описывающих такие миры в системе координат Тангерлини, проводим, учитывая вид функции  $U_\gamma(a)$  (см. рис. 3). На рис. 3 приведены уровни энергии  $E_\gamma$  частиц, соответствующие различным типам решений уравнения (52).

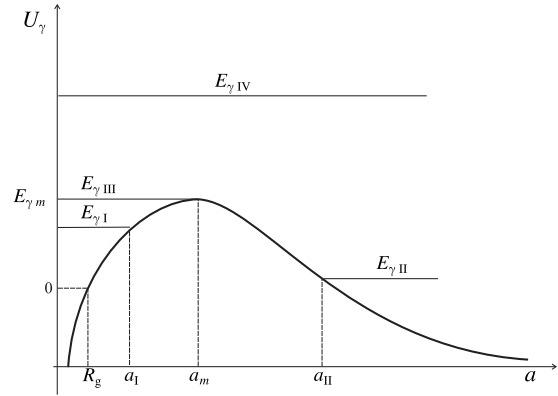


Рис. 3. Графики функции  $U_\gamma(a)$ , определяемой формулой (53) при  $L_\gamma \neq 0$

Для уравнения (52) точка  $a = R_g$  является особой. В системе координат Тангерлини физически разумные решения этого уравнения имеют место при  $a > R_g$ . В этой системе координат состояние 3-мира с  $a = R_g$  является «чёрной дырой».

Покажем, что время входа 3-мира в состояние «чёрная дыра», а также симметричное ему время выхода из этого состояния, в системе координат Тангерлини оказывается бесконечным. Считая  $\delta$  малой, но конечной величиной, найдём время эволюции 3-мира от размера  $a = R_g + \delta$  до  $a = R_g + \varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для  $a$  близких к  $R_g$ , как видно из (53), значение  $U_\gamma(a)$  мало отличается от нуля. Учитывая это, уравнение (52) для этих значений  $a$  запишем в виде

$$\frac{1}{(1 - R_g^2/a^2)} \frac{da}{cdt} = 1. \quad (55)$$



Из (55) находим

$$c(t_\varepsilon - t_\delta) = \int_{R_g + \delta}^{R_g + \varepsilon} \frac{da}{1 - R_g^2/a^2}. \quad (56)$$

Интегрируя (56), заключаем, что интеграл расходится при  $a \rightarrow R_g$  как  $-R_g \ln(a - R_g)$ . Отсюда следует асимптотический закон приближения  $a$  к  $R_g$ :

$$a - R_g = \text{const} \cdot e^{-ct/R_g}. \quad (57)$$

Таким образом, в системе координат Тангерлини конечная стадия перехода 3-мира в состояние «чёрная дыра» описывается экспоненциальным законом с характерным временем  $\sim R_g/c$ . Время перехода в это состояние бесконечно. Это означает также бесконечное время выхода 3-мира наружу из состояния «чёрная дыра», если предположить, что это состояние для 3-мира является «начальным».

При значениях параметра  $L_\gamma \neq 0$ , как видно из рис. 3, возможны четыре типа решений  $a(t)$ , описывающих динамику релятивистских сферических 3-миров в системе координат Тангерлини. На рис. 4 приведены графики, качественно характеризующие эти решения.

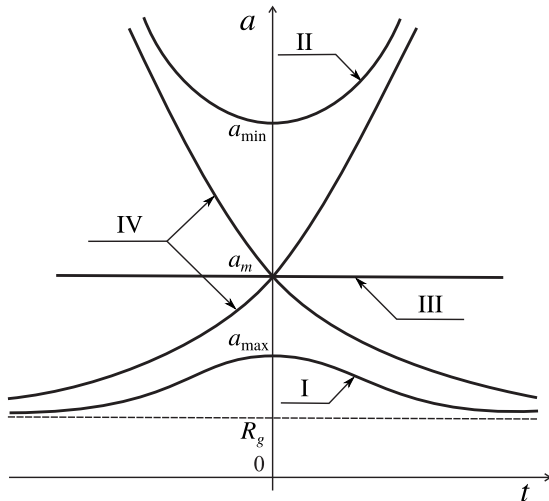


Рис. 4. Графики, схематично описывающие различные типы решений уравнения (52) при значениях параметра  $L_\gamma \neq 0$

Интервалы значений энергий  $E_\gamma$  и размеров 3-миров, описываемых этими решения-

ми, следующие:

$$\begin{aligned} \text{I} - (E_{\gamma\text{I}} < E_{\gamma m}, \quad a \leq a_m); \\ \text{II} - (E_{\gamma\text{II}} < E_{\gamma m}, \quad a \geq a_{\text{II}}); \\ \text{III} - (E_{\gamma\text{III}} = E_{\gamma m}, \quad a = a_m); \\ \text{IV} - (E_{\gamma\text{IV}} > E_{\gamma m}, \quad a > R_g). \end{aligned} \quad (58)$$

В следующем параграфе рассмотрены решения, описывающие динамику релятивистского 3-мира в сопутствующей системе координат.

### 5. ДИНАМИКА СФЕРИЧЕСКИХ 3-МИРОВ В СОПУТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В метрике Тангерлини (40)  $g_{00}$  обращается в нуль, а  $g_{11}$  — в бесконечность при  $r = R_g$ . В системе координат Тангерлини время приближения 3-мира к состоянию  $a = R_g$  оказывается бесконечным. В области  $r < R_g$  метрические коэффициенты  $g_{00}$  и  $g_{11}$  становятся отрицательными. Это обстоятельство могло бы дать основание к заключению о невозможности существования 3-миров с «радиусом», меньшим гравитационного. В действительности такое заключение не является правильным. Можно лишь утверждать, что метрику Тангерлини в области  $r < R_g$  применять нельзя.

Для описания динамики сферических 3-миров любых размеров используем сопутствующую систему координат. Будем называть её также системой координат типичных наблюдателей. Эти наблюдатели находятся в 3-мире. В системе координат Тангерлини они совершают относительно центра 3-мира лишь радиальное движение. Время в сопутствующей системе координат определяется так, что для любого типичного наблюдателя интервал между двумя бесконечно близкими событиями, происходящими в точке, где он находится, описывается формулой

$$ds^2 = c^2 dt^2. \quad (59)$$

Время  $\tau$  называют собственным временем.

Тангерлиниевы координаты произвольного типичного наблюдателя:  $a(t)$ ,  $\chi$ ,  $\theta$  и  $\phi$ . В сопутствующей системе ими, по определению, являются  $\chi$ ,  $\theta$  и  $\phi$ . Расстояние этого

наблюдателя до начала сопутствующей системы координат:  $R(\tau) = a(\tau)\chi$ . Масштабный фактор  $a(\tau)$  описывает однородное изотропное растяжение сопутствующей системы координат. Уравнение, описывающее изменение масштаба  $a$  в системе координат Тангерлини, определяется формулой (52). Перепишем его в терминах собственного времени, т. е. в виде, определяющем изменение  $a(\tau)$  в сопутствующей системе координат.

Произвольный типичный наблюдатель движется относительно центра 3-мира радиально. Координаты любого типичного наблюдателя  $\chi$ ,  $\theta$  и  $\phi$  в процессе эволюции сферического 3-мира остаются постоянными. Уравнения, описывающие его движение в сопутствующей системе координат, имеют вид

$$\begin{aligned} R(\tau) &= a(\tau)\chi_0, & \chi(\tau) &= \chi_0, \\ \theta(\tau) &= \theta_0, & \phi(\tau) &= \phi_0. \end{aligned} \quad (60)$$

В процессе эволюции сферического 3-мира сохраняется его однородность и изотропность. Справедлив закон Хаббла:

$$dR(\tau)/d\tau = H(\tau)R(\tau), \quad (61)$$

где  $H(\tau) = (da/d\tau)/a$  — параметр Хаббла, одинаковый для любых  $R(\tau)$ .

Связь между собственным временем  $\tau$  типичного наблюдателя и временем  $t$  метрики Тангерлини находим из уравнения

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{R_g^2}{a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{da^2}{1 - R_g^2/a^2}. \quad (62)$$

Учитывая, что  $a(t)$  удовлетворяет уравнению (52), из (62) находим

$$\frac{d\tau}{dt} = \left(1 - \frac{R_g^2}{a^2}\right)^{1/2} \frac{U_\gamma(a)}{E_\gamma}. \quad (63)$$

Используя (63), уравнение (52) перепишем в терминах собственного времени:

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{a}{L_\gamma} (E_\gamma^2 - U_\gamma^2)^{1/2}. \quad (64)$$

В отличие от уравнения (52) уравнение (64) не имеет особенности при  $a = R_g$ . Собственное время, за которое 3-мир проходит

радиус  $a = R_g$  в сопутствующей системе отсчёта, бесконечно мало. Учитывая это, считаем, что уравнение (64) описывает динамику релятивистских сферических 3-миров не только в области  $a > R_g$ , но и при  $0 \leq a \leq R_g$ .

## 6. ЭЙНШТЕЙНОВСКИЕ СИЛЫ ОТТАЛКИВАНИЯ

Уравнение (64) является уравнением, описывающим эволюцию релятивистских сферических 3-миров в сопутствующей системе координат. Учитывая (53), приводим его к виду

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = -\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2 R_g^2}{a^4} + \frac{E_\gamma^2}{L_\gamma^2}. \quad (65)$$

В приложении показано, что в случае произвольного значения параметра  $k$ , определяющего тип геометрии релятивистского 3-мира, уравнение, описывающее его эволюцию, может быть записано в виде

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = -\frac{kc^2}{a^2} + \frac{c^2 R_g^2}{a^4} + \frac{E_\gamma^2}{L_\gamma^2}. \quad (66)$$

Это уравнение является первым интегралом уравнения

$$\frac{d^2 a}{d\tau^2} = -\frac{c^2 R_g^2}{a^3} + \frac{E_\gamma^2 a}{L_\gamma^2}. \quad (67)$$

Сравнивая космологические уравнения А. А. Фридмана (2), (3) с уравнениями (66) и (67), заключаем, что они совпадают, если считать, что гравитационный радиус 3-мира

$$R_g = \sqrt{\frac{8\pi G \rho a^4}{3c^2}}, \quad (68)$$

а космологическая постоянная  $\Lambda$  связана с параметрами частиц в 3-мире (интегралами их движения  $E_\gamma$  и  $L_\gamma$  в тангерлиниевой системе координат) формулой

$$\Lambda = \frac{3E_\gamma^2}{c^2 L_\gamma^2}. \quad (69)$$

Из (67) заключаем, что в релятивистском 3-мире, однородно заполненном частицами, кроме сил притяжения, действуют силы отталкивания. В сопутствующей систе-

ме координат силы отталкивания являются эйнштейновскими. Они описываются Л-членом уравнений ОТО. Чтобы понять физический смысл космологических сил отталкивания, рассмотрим уравнения, описывающие динамику релятивистских 3-миров в предельном случае  $a \gg R_g$ . Этот предельный случай можно исследовать формально, полагая  $R_g = 0$ .

Уравнения, описывающие динамику релятивистских 3-миров в приближении  $R_g = 0$ , в системе координат Тангерлини имеют вид

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = -kc^2 - \frac{c^2 L_\gamma^2}{E_\gamma^2 a^2}, \quad (70)$$

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{dU_{cf}}{da}, \quad (71)$$

где

$$U_{cf} = \frac{c^4 L_\gamma^2}{2E_\gamma^2} \cdot \frac{1}{a^2}. \quad (72)$$

Уравнение (71) описывает «движение» релятивистского 3-мира под действием центробежных сил. Функция  $U_{cf}$  определяет центробежную энергию частиц. Видно, что источником центробежных космологических сил отталкивания является тепловая энергия космической среды. В случае отсутствия теплового движения, вращательные моменты частиц равны нулю и при этом центробежные космологические силы отталкивания отсутствуют.

В сопутствующей системе координат уравнения, описывающие динамику релятивистского 3-мира в приближении  $R_g = 0$ , имеют вид

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = -kc^2 + \frac{E_\gamma^2}{L_\gamma^2} a^2, \quad (73)$$

$$\frac{d^2 a}{d\tau^2} = \frac{E_\gamma^2 a}{L_\gamma^2} = \frac{1}{3} \Lambda c^2 a. \quad (74)$$

Видно, что то, что в сопутствующей системе координат силы отталкивания являются эйнштейновскими. Источником этих сил является релятивистская компонента космической среды, которая в настоящей статье

лишь и учитывается. Космологическая постоянная  $\Lambda$  определяет универсальную взаимосвязь между микроскопическими параметрами  $E_\gamma$  и  $L_\gamma$  частиц.

В тангерлиниевой системе координат скорость релятивистских 3-миров совпадает с радиальной компонентой скорости движения частиц. Она определяется формулой

$$\frac{da}{dt} = c \left(1 - \frac{R_g^2}{a^2}\right) \times \left[1 - \frac{c^2 L_\gamma^2}{a^2 E_\gamma^2} \left(1 - \frac{R_g^2}{a^2}\right)\right]^{1/2}. \quad (75)$$

Видно, что эта скорость всегда меньше скорости света. При  $a \rightarrow R_g$   $da/dt \rightarrow 0$ ; при  $a \rightarrow \infty$   $da/dt \rightarrow c$ .

В сопутствующей системе координат скорость расширения релятивистских 3-миров определяется формулой

$$\frac{da}{d\tau} = c \left[-k + \frac{R_g^2}{a^2} + \frac{E_\gamma^2 a^2}{c^2 L_\gamma^2}\right]^{1/2}. \quad (76)$$

Величина  $da/d\tau$  не имеет смысла физической скорости частиц. Нет основания считать, что величина  $da/d\tau$  не может быть больше скорости света. При  $a \rightarrow 0$  и  $a \rightarrow \infty$   $da/d\tau \rightarrow \infty$ . В то же время скорость пролёта релятивистских частиц мимо любого типичного наблюдателя определяется формулой

$$W = \pm a \frac{d\phi}{d\tau} = \pm a \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \frac{dt}{d\tau}. \quad (77)$$

Учитывая уравнения (25), (30) и (48), находим  $W = \pm c$ . Это означает, что скорость частиц относительно любого типичного наблюдателя равна скорости света.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано следующее.

1. Стандартным методом, основанном на космологических уравнениях А. А. Фридмана, описана динамика релятивистских 3-миров в четырёхмерном пространстве-времени. Это описание содержит три независимых параметра: постоянную Хаббла  $H_0$ , плотность излучения  $\rho_0$ , а также плотность

«тёмной энергии»  $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/(8\pi G)$ . В процессе эволюции 3-мира плотность излучения  $\rho$  и масштаб 3-мира  $a$  связаны соотношением (5). Существенным недостатком стандартного метода описания динамики 3-мира является отсутствие понимания физического смысла «тёмной энергии». Полученные в рамках стандартного подхода выводы о динамике 3-мира находятся в согласии с известными общими представлениями о фридмановской динамике Вселенной, рассчитанной в рамках уравнений Эйнштейна с  $\Lambda$ -членом (см., например, [2, гл. 4]).

2. Проведено изучение динамики 3-миров, основанное на предположении, что они являются трёхмерными объектами, погруженными в пространство четырёх измерений и описываемые в рамках уравнений Эйнштейна в пятимерном пространстве-времени. Записана его метрика, учитывающая симметрию 3-мира (метрика Тангерлини). 3-мир рассматривается как трёхмерная центрально-симметричная гиперповерхность, однородно заполненная релятивистскими частицами.

3. Получены уравнения, описывающие движение 3-миров в четвёртом (радиальном) пространственном измерении системы координат Тангерлини. Показано, что в этой системе координат динамика 3-мира определяется не только силами тяготения, но и отталкивания, и эти силы являются центробежными. Существование космологических центробежных сил связано с наличием тепловых скоростей движения частиц и кривизной пространства 3-мира. Эти силы действуют во внешнем для 3-миров пространственном измерении, растягивая их.

4. Проведено преобразование уравнения, описывающего динамику 3-миров в тангерлиниевых координатах в уравнение, описывающее эту динамику в сопутствующей системе координат. Это описание содержит четыре параметра: постоянную Хаббла  $H_0$ , гравитационный радиус 3-мира  $R_g$ , а также интегралы движения  $E_\gamma$  и  $L_\gamma$ , определяющие энергию и космологический момент вращения частиц 3-мира, соответственно.

5. Показано, что возможны четыре типа решений, описывающих эволюцию 3-миров. Вид этих решений существенно отличается

в тангерлиниевой и сопутствующей системах координат. В сопутствующей системе координат два типа решений описывают 3-миры, рождённые в результате «Большого взрыва». Один из них описывает замкнутый 3-мир, другой открытый 3-мир. Существуют решения, описывающие стационарные 3-миры. Эти решения не являются устойчивыми. Возможны решения, описывающие 3-миры без сингулярности. Они описывают однородное сжатие этих миров до некоторого минимального размера с последующим неограниченным их расширением.

6. Проведено сравнение космологических уравнений А. А. Фридмана, описывающих динамику 3-миров стандартным методом и уравнений, описывающих 3-миры как объекты в четырёхмерном пространстве. Показано, что они совпадают, если считать, что гравитационный радиус 3-мира удовлетворяет соотношению (68), а космологическая постоянная  $\Lambda$  связана с интегралами движения частиц  $E_\gamma$  и  $L_\gamma$  формулой (69).

7. Вид космологических сил отталкивания зависит от выбора системы координат. В системе координат Тангерлини они являются центробежными силами ( $d^2a/dt^2 \sim a^{-3}$ ). В сопутствующей системе координат космологические силы отталкивания проявляются как эйнштейновские силы отталкивания ( $d^2a/dt^2 \sim a$ ). Космологическая постоянная определяет универсальную взаимосвязь между интегралами движения частиц  $E_\gamma$  и  $L_\gamma$ :

$$E_\gamma = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} L_\gamma c. \quad (78)$$

*Замечание.* Предположение о том, что все частицы имеют одинаковые значения параметров  $E_\gamma$  и  $L_\gamma$ , не является необходимым. Вид уравнений, описывающих динамику 3-миров, не изменится, если считать, что излучение является чернотельным, а соотношение между параметрами частиц  $E_\gamma$  и  $L_\gamma$  определяется формулой (78), в которой величина  $\Lambda$  является универсальной постоянной. Отметим также, что отношение  $cL_\gamma/E_\gamma$  равно прицельному расстоянию при описании траекторий релятивистских частиц, рассеивающихся на гравитирующей точечной массе, гравитационное поле ко-

торой определяется метрикой Тангерлини (см., например, [21]).

Авторы выражают благодарность В. Н. Лукашу, И. Д. Новикову, А. В. Клименко, А. М. Черепашуку, И. Г. Шухману, обсуждение с которыми проблемы космологических сил отталкивания было одним из важных стимулов для выполнения настоящей работы. Авторы признательны Н. Ю. Жилкиной за помощь в подготовке статьи. Работа выполнена при поддержке Российской академии наук (программа Президиума 19), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-02-00371, 09-02-00064), Федерального агентства по науке и инновациям, и средств Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау, Л. Д. Теория Поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1988.
2. Зельдович, Я. Б. Стрoение и эволюция Вселенной / Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. М.: Наука, 1975.
3. Вайнберг, С. Гравитация и космология. М.: Платон, 2000.
4. Perlmutter, S. Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae / S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber et al. // *Astroph. J.* 1999. Vol. 517, № 2, P. 565–586.
5. Riess, A. G. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant / A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis et al. // *Astron. J.* 1988. Vol. 116, № 3, P. 1009.
6. Чернин, А. Д. Тёмная материя и всемирное антитяготение // *УФН.* 2008. Т. 178, № 3, С. 267–300.
7. Горбунов, Д. С. Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего большого взрыва / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. М.: ЛКИ, 2008.
8. Hinshaw, G. Three-year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: implications for cosmology / G. Hinshaw, M. R.olta, C. L. Bennet et al. // *Astrophys. J. Suppl.* 2007. Vol. 170, № 2. P. 377–408.
9. Astier, P. The Supernova Legacy Survey: measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the first year data set / P. Astier, J. Guy, N. Regnault et al. // *Astron. and Astrophys.* 2006. Vol. 447, № 1. P. 31–48.
10. Riess, A. G. New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at  $z \geq 1$ : Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy / A. G. Riess, L.-G. Strolger, S. Casertano et al. // *Astrophys. J.* 2007. Vol. 659, № 1. P. 98.
11. Лукаш, В. Темная энергия: мифы и реальность / В. Н. Лукаш, В. А. Рубаков // *УФН.* 2008. Т. 178, № 3. С. 310–308.
12. Черепашук, А. М. Современная космология — наука об эволюции Вселенной / А. М. Черепашук, А. Д. Чернин // *Бюллетень РАН «В защиту науки».* 2008. № 4.
13. Глинер, Э. Б. Раздувающаяся Вселенная и вакуумоподобное состояние физической среды // *УФН.* 2002. Т. 172, № 2. С. 221–228.
14. Клименко, В. А. О центробежной природе «тёмной энергии» / В. А. Клименко, А. М. Фридман. М.: ИАЭ, 2009. Т. 6597/1.
15. Клименко, А. В. О равномерном расширении Вселенной / А. В. Клименко, В. А. Клименко, А. М. Фридман М. // *Астрон. журн.* 2010. Т. 87, № 10. С. 947–966.
16. Жилкин, А. Г. Динамика двумерных сферических миров / А. Г. Жилкин, В. А. Клименко, А. М. Фридман // *Вестн. Челяб. гос. унта.* 2013. № 19 (310). Физика. Вып. 17. С. 12–28.
17. Жилкин, А. Г. Об эйнштейновских силах отталкивания / А. Г. Жилкин, В. А. Клименко, А. М. Фридман // *Докл. Акад. наук.* 2010. Т. 435, № 6. С. 748–751.
18. Randall, L. An Alternative to Compactification / L. Randall, R. Sundrum // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83. P. 4690–4693.
19. Maartens, R. Brane-World Gravity // *Living Reviews in Relativity.* 2004. Vol. 7, № 7.
20. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1988.
21. Мизнер, Ч. Гравитация : в 3 т. / Ч. Мизнер, К. Торн, Д. Уиллер. М.: Мир, 1977.
22. Tangherlini, F. Schwarzschild field in  $n$  dimensions and the dimensionality of space problem // *Nuovo Cim.* 1963. № 27. P. 636–651.

## Приложение

Уравнения геодезических (42) в случае произвольных значений  $k$  для  $\mu = 2, 3$  и 4 можно записать в виде:

$$\frac{d^2\chi}{d\lambda^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{d\lambda} \frac{d\chi}{d\lambda} - \Sigma_k \frac{d\Sigma_k}{d\chi} \times \left[ \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right] = 0, \quad (79)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} + \frac{d \ln \Sigma_k}{d\chi} \frac{d\chi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (80)$$

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} + \frac{d \ln \Sigma_k}{d\chi} \frac{d\chi}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} - 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0. \quad (81)$$

Из уравнения (80) следует, что если в начальный момент  $\lambda_0$   $\theta_0 = \pi/2$ ,  $(d\theta/d\lambda)_0 = 0$ , то и при всех  $\lambda$   $\theta(\lambda) = \pi/2$ . Без ограничения общности можно рассматривать только те частицы, для которых  $\theta = \pi/2$ . При этом условия оставшиеся уравнения (79) и (81) дают

$$\frac{d^2\chi}{d\lambda^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{d\lambda} \frac{d\chi}{d\lambda} - \Sigma_k \frac{d\Sigma_k}{d\chi} \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (82)$$

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{a} \frac{da}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} + \frac{d \ln \Sigma_k}{d\chi} \frac{d\chi}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0. \quad (83)$$

Нетрудно убедиться, что эти уравнения содержат интеграл, выражающий закон сохранения углового момента частицы:

$$\left( \frac{d\chi}{d\lambda} \right)^2 + \Sigma_k^2 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = \frac{L_\gamma^2}{a^4}. \quad (84)$$

В случае, когда  $\theta \neq \pi/2$ , интеграл движения (84) имеет вид

$$\left( \frac{d\chi}{d\lambda} \right)^2 + \Sigma_k^2 \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \Sigma_k^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = \frac{L_\gamma^2}{a^4}.$$

При этом все последующие выводы сохраняют силу.

Для  $\mu = 0$  уравнение геодезических совпадает с уравнением (47), выведенным для случая  $k = +1$ . Соответствующий интеграл движения для случая произвольного  $k$  можно записать в виде

$$E_\gamma = c^2 \left( k - \frac{R_g^2}{a^2} \right) \frac{dx^0}{d\lambda} \quad (85)$$

Наконец, уравнение для  $\mu = 1$  можно получить способом, описанным в разделе 4. В результате несложных выкладок можно прийти к следующему уравнению:

$$\frac{1}{k - R_g^2/a^2} \frac{da}{dt} = \frac{c}{E_\gamma} [E_\gamma^2 - U_\gamma^2(a)]^{1/2}, \quad (86)$$

где

$$U_\gamma^2(a) = \frac{L_\gamma^2}{a^2} \left( k - \frac{R_g^2}{a^2} \right). \quad (87)$$

В сопутствующих координатах это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{a}{L_\gamma} [E_\gamma^2 - U_\gamma^2(a)]^{1/2}. \quad (88)$$

Возводя обе части (88) в квадрат и используя (87), можно прийти к уравнению (66).