

Геометрическая природа космологических сил отталкивания

А. В. Клименко^{1,*} и В. А. Клименко^{2,1}

¹ООО «Бизнес и Технологии», Челябинск, Россия

²«Челябинский государственный университет», Челябинск, Россия

Уравнения Эйнштейна не являются полными. Они лишь частично учитывают влияние на динамику Вселенной той части энергии космической среды, изменение которой является чисто геометрическим. Предложены обобщённые уравнения Эйнштейна, описывающие не только силы гравитации, но и космологические силы отталкивания, являющиеся геометрическими по своей природе.

Обобщённые уравнения Эйнштейна использованы для получения космологических уравнений Фридмана, описывающих динамику однородной изотропной Вселенной с учётом влияния космологических сил отталкивания. Предложена космологическая модель Вселенной, основанная на этих уравнениях. Рассмотрены приложения модели для объяснения наблюдений.

Ключевые слова: космология, общая теория относительности, эйнштейновские уравнения, силы отталкивания.

PACS numbers: 04.20.-q, 96.10.+i

* alklimenko@gmail.com

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Обобщённые уравнения Эйнштейна	4
3. Обобщённые космологические уравнения Фридмана	10
4. Космологические модели Вселенной с учётом центробежных сил	11
4.1. С-модель (C — centrifugal)	11
4.2. S-модель (S — simple)	13
5. Объяснение космологических наблюдений	14
5.1. Зависимость «видимая звездная величина — красное смещение» для сверхновых типа Ia	14
5.2. Анизотропия реликтового излучения	16
5.3. Возраст Вселенной	17
6. Результаты	18
Приложение	22
О связи геометрии Вселенной с полной энергией космической среды	22
Список литературы	24

1. ВВЕДЕНИЕ

Ещё сравнительно недавно считали, что динамику Вселенной определяют силы тяготения (см., например, [1–5]). В настоящее время существуют многочисленные наблюдательные данные для объяснения которых используется предположение о существовании космологических сил отталкивания. Считается, что динамика однородной изотропной Вселенной в значительной степени определяется влиянием этих сил (см., например, [6–12]).

Известны варианты объяснения космологических сил отталкивания в рамках уравнений Эйнштейна. Они, для случая однородной изотропной Вселенной, могут быть преобразованы в космологические уравнения Фридмана и записаны в виде [1]:

$$\frac{d\varepsilon}{da} + 3(\varepsilon + P)\frac{1}{a} = 0, \quad (1)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G\frac{a}{c^2}(\varepsilon + 3P), \quad (2)$$

где ε и P – плотность энергии и давление космической среды, соответственно; $a(t)$ – радиус кривизны трёхмерного пространства.

Из (2) видно, что обычные космические среды, для которых $\varepsilon > 0$ и $P > 0$, в однородной изотропной Вселенной не порождают космологических сил отталкивания. Чтобы описание этих сил в рамках уравнений Эйнштейна стало возможным, гипотетически предполагают существование сред с отрицательным давлением. Например, таких как: «тёмная энергия» ($P = -\varepsilon$); «квинтэссенция» ($-\varepsilon < P < -(1/3)\varepsilon$); «фантомная энергия» ($P < -\varepsilon$) (см., например, [13–15]). Из (2) видно, что такие среды являются источниками космологических сил отталкивания. Недостаток описанного варианта объяснения этих сил — отсутствие понимания физического смысла таких сред.

В настоящей работе предлагается альтернативный вариант введения в ОТО космологических сил отталкивания. Он не основан на гипотезе о существовании сред с отрицательным давлением. Считаем, что все компоненты космической среды являются обычными и могут быть описаны современной физикой. В тоже время предполагаем, что уравнения Эйнштейна не являются полными. Считаем, что они лишь частично учитывают влияние на динамику Вселенной той части энергии космической среды, изменение которой является чисто геометрическим. В работе дано определение этой части энергии космической среды. Предложено называть её волновой энергией. Выска-

зана гипотеза, что волновая энергия космической среды является не только источником поля притяжения, но одновременно и поля отталкивания. В рамках этой гипотезы получены решения, описывающие динамику однородной изотропной Вселенной. Они хорошо объясняют наблюдения для которых эффекты космологического расширения являются существенными.

Работа имеет следующую структуру. Обобщённые уравнения Эйнштейна, содержащие описание космологических сил отталкивания, источником которых является волновая энергия космической среды, записаны в разделе 2. В разделе 3 эти уравнения преобразованы в обобщённые космологические уравнения Фридмана, описывающие динамику однородной изотропной Вселенной. В разделе 4 предложена космологическая модель Вселенной, основанная на этих уравнениях (С-модель, С-Centrifugal). Примеры использования С-модели для объяснения некоторых важных для космологии наблюдательных данных содержатся в разделе 5. В разделе 6 приведён перечень полученных результатов.

2. ОБОБЩЁННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

В основе современных космологических моделей лежат уравнения Эйнштейна

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (3)$$

см., например, [1–4]. Здесь $R^{\mu\nu}$ — тензор Риччи; R — инвариант, полученный сверткой этого тензора; Λ — космологическая постоянная; G — гравитационная постоянная, c — скорость света. Предполагается, что космическая среда является идеальной и для тензора энергии–импульса $T^{\mu\nu}$ используется выражение (см., например, [1, 3]):

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}, \quad (4)$$

где u^μ — четырёхмерная скорость.

Для описания динамики однородной и изотропной Вселенной, в предположении $\Lambda = 0$, уравнения (3) можно преобразовать в космологические уравнения Фридмана (1), (2), см., например, [1]. Из (2) следует, что обычные однородные среды не могут ускорять космологическое расширение Вселенной. Предполагая, что уравнения Эйнштейна не являются полными, усомнимся в абсолютной правильности этого вывода. Это предположение основано на следующем качественном соображении.

Космическую среду рассматриваем как совокупность частиц, имеющих определённые длины волн λ . Для различных частиц длины волн отличаются. В тоже время закон их космологического изменения один и тот же. В сопутствующей трёхмерной системе отсчёта выполняется соотношение: $\lambda \sim a$. Оно имеет чисто геометрическую природу (см., например, [1, гл.3]). Геометрическая интерпретация соотношения $\lambda \sim a$ предлагалась уже давно, см., например, Паули [16], Уилера [17].

В процессе космологического расширения увеличиваются длины волн частиц λ , при этом уменьшается их энергия, определяемая формулой:

$$\varepsilon_\lambda = h c / \lambda, \quad (5)$$

где h — постоянная Планка. Энергию ε_w далее будем называть волновой. Полагаем, что уменьшение в процессе расширения Вселенной волновой энергии, имеющее чисто геометрическую природу, одновременно сопровождается равным увеличением той части энергии частиц, которая в сопутствующей системе отсчёта связана с их «радиальным» разлётом. Увеличение кинетической энергии радиального разлёта космической среды интерпретируем как происходящее под действием космологических сил отталкивания. Эти силы имеют чисто геометрическую природу. Они связаны с изменением, в процессе космологического расширения Вселенной, соотношения между волновой энергией частиц и их энергией, связанной с радиальным разлётом космической среды. В уравнениях Фридмана описание этих сил отсутствует, следовательно оно не содержится и в уравнениях Эйнштейна.

Учитывая вышеизложенное, действие космологических сил растягивающих Вселенную, связываем с наличием у среды волновой энергии. Плотность этой энергии, для любой компоненты космической среды, в сопутствующей системе отсчёта определяем формулой:

$$\varepsilon_w = n \varepsilon_\lambda = h c n / \lambda, \quad (6)$$

где n — плотность частиц.

В условиях однородной изотропной, расширяющейся Вселенной $n a^3 = const$, $\lambda \sim a$ и поэтому плотность волновой энергии ε_w и масштаб Вселенной a связаны соотношением:

$$\varepsilon_w a^4 = const. \quad (7)$$

Изменение, в процессе расширения Вселенной, плотности волновой энергии ε_w , имеющее чисто геометрическую природу, рассматриваем как происходящее за счет работы

сил волнового давления P_w . Из первого начала термодинамики:

$$d(\varepsilon_w V) = -P_w dV, \quad (8)$$

учитывая, что $V \sim a^3$, находим, что при выполнении соотношения (7), давление P_w следует определять формулой:

$$P_w = \frac{1}{3}\varepsilon_w. \quad (9)$$

Эта формула аналогична той, которая записывается для чёрнотельного равновесного излучения [1–3].

Волновая и тепловая энергии космической среды взаимосвязаны. В случае, когда космической средой является чёрнотельное излучение, обе эти энергии тождественны. В общем случае, чем выше температура космической среды, тем больше плотность волновой энергии, тем больше её влияние на космологическое расширение Вселенной. В ранней Вселенной влияние волновой энергии на динамику Вселенной является определяющим. В предельном случае холодной космической среды волновая энергия равна нулю, и действие космологических сил отталкивания не проявляется.

Обобщение уравнений Эйнштейна проводим соблюдая стандартные требования ОТО: форма записи обобщённых уравнений должна оставаться ковариантной; должны выполняться фундаментальные законы сохранения. В случае, когда вклад волновой энергии космической среды в её полную энергию является пренебрежимо малым, предлагаемые уравнения переходят в уравнения Эйнштейна.

Чтобы описать космологические силы отталкивания, растягивающие Вселенную, выделяем в тензоре энергии–импульса (4) часть, связанную с волновой энергией и волновым давлением космической среды. Для этого записываем его в виде:

$$T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu} + \bar{T}^{\mu\nu}, \quad (10)$$

где

$$\bar{T}^{\mu\nu} = (\varepsilon_w + P_w) u^\mu u^\nu - P_w g^{\mu\nu}. \quad (11)$$

Выделяя в тензоре $T^{\mu\nu}$ волновую часть $\bar{T}^{\mu\nu}$, учитываем, что ковариантно сохраняется не только полный тензор энергии-импульса, но и его волновая часть. Считаем, что справедливо уравнение:

$$\nabla_\mu \bar{T}^{\mu\nu} = 0 \quad (12)$$

и оно имеет чисто геометрическую природу. Определив плотность волновой энергии ε_w формулой (6), волновое давление P_w находим из уравнения (12). Например, в случае однородной изотропной Вселенной из (6) и (12) следует справедливость формулы (9).

Отметим, что использование формул (6), (9), позволяющих определить волновую часть тензора энергии-импульса, является законным и в области сколь угодно высоких температур, если предполагать сохранение фридмановского характера расширения Вселенной и существование в космической среде локального термодинамического равновесия. Первое требование используется, когда предполагается, что $\lambda \sim a$; второе — при записи тензора энергии-импульса в виде (4).

Для идеальной космической среды в однородной изотропной Вселенной

$$\bar{T}^{\mu\nu} = P_w(4u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}). \quad (13)$$

След тензора $\bar{T}^{\mu\nu}$ равен нулю. Для холодной пылевидной космической среды $\bar{T}^{\mu\nu} = 0$. В случае среды, состоящей из чёрнотельного излучения $\bar{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}$.

Отличие тензора $T_0^{\mu\nu}$ от нуля связано с наличием у некоторой части частиц космической среды массы покоя не равной нулю. В обычных астрофизических условиях вклад энергии, связанной с массой покоя частиц, в полную энергию космической среды является определяющим. В этих условиях часть тензора энергии-импульса $T_0^{\mu\nu}$ является основной, а волновая его часть $\bar{T}^{\mu\nu}$ пренебрежимо малой.

Предлагаемое в работе обобщение уравнений Эйнштейна заключается в следующем. Считаем, что волновая часть тензора энергии-импульса является не только источником гравитационного поля, но одновременно и источником поля космологических сил отталкивания. С учётом этого, обобщённые уравнения Эйнштейна записываем в виде:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} - \frac{8\pi C}{c^4}\bar{T}^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (14)$$

где C — постоянная космологических сил отталкивания.

Необходимость введения в ОТО космологических сил отталкивания, источником которых является тепловая энергия космической среды, обсуждалась ранее в работах [18, 19]. В настоящей работе уточнено определение источника этих сил и найдено их ковариантное описание. Считать, что источником космологических сил отталкивания является тепловая энергия космической среды, в общем случае, не совсем правильно.

В предельном случае исчезающе малого влияния материи на метрические свойства пространства, его динамика описывается уравнениями Эйнштейна для пустоты:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что космологическая постоянная Λ связана с скалярной кривизной пустого четырехмерного пространства–времени R формулой:

$$\Lambda = -\frac{1}{4} R. \quad (16)$$

Используя (15), легко показать, что скалярная кривизна R пустого пространства–времени является постоянной.

В работе учитываем, что решения уравнения (14), в предельном случае исчезающе малого влияния материи на метрические свойства пространства, должны переходить в одно из возможных решений уравнения (15), описывающего динамику пустого трёхмерного пространства.

Можно показать, что для пустых пространств, в предположении их однородности и изотропности, при $\Lambda \neq 0$, имеют место экспоненциально расходящиеся решения уравнения (15). Их интерпретация, в рамках современных физических теорий, затруднительна. В тоже время, при $\Lambda = 0$, для пустых однородных пространств возможны два решения этого уравнения являющихся физическими и понятными. Первое из них описывает стационарное плоское трёхмерное пространство, расстояние между любыми точками которого остается постоянным. Оно определяет на бесконечности свойства стационарного пространства, охватывающего материальную точку. Второе решение описывает равномерно расширяющееся открытое кривое пространство, радиус кривизны которого меняется со скоростью света. Считаем, что именно последнее и является предельным состоянием пространства безгранично расширяющейся однородной Вселенной. Учитывая вышесказанное, в настоящей работе значение космологической постоянной полагаем равным нулю.

Описывая динамику Вселенной, используем двухкомпонентное приближение. Полагаем, что космическая среда состоит из двух однородно перемешанных компонент: нерелятивистской и релятивистской.

В нерелятивистскую компоненту включаются все составляющие космической среды, как видимые («барионная компонента»), так и пока невидимые («тёмная материя»).

Эта компонента состоит из частиц, масса покоя которых много больше их кинетической энергии. Она является кластеризуемой и в настоящее время основной по массе/энергии во Вселенной. Влияние волновой энергии нерелятивистской компоненты на динамику Вселенной является пренебрежимо малым, за исключением ранней Вселенной, когда при очень высоких температурах частицы, имеющие массу покоя отличную от нуля, могут приближённо рассматриваться как разновидности излучения (см., например, [2]).

В релятивистскую компоненту включаем все составляющие космической среды, как наблюдаемые (реликтовое излучение), так и не наблюдаемые (реликтовые нейтрино и возможно что-то ещё), уравнение состояния для которых $P = (1/3)\varepsilon$. Эта компонента состоит из частиц, масса покоя которых равна нулю, либо много меньше их полной энергии. Считаем, что релятивистская составляющая является некластеризуемой, однородно распределённой в пространстве. В настоящее время её вклад в полную энергию космической среды и влияние на динамику Вселенной является малым (см., например, [1, 2, 11]). В тоже время в ранней Вселенной этот вклад был главным и именно релятивистская компонента определяла динамику Вселенной.

Отношение концентраций частиц нерелятивистской компоненты n_M и релятивистской n_{rad} , за исключением самых ранних стадий эволюции Вселенной, остается постоянным. Согласно наблюдательным данным $n_{rad}/n_M \sim 10^9$. Здесь и далее значки M и rad используем, как это принято (см., например, [11]) для обозначения величин, описывающих нерелятивистскую и релятивистскую компоненты, соответственно.

Учитывая, что подавляющая часть волновой энергии во Вселенной, за исключением самых ранних этапов её эволюции, содержится в релятивистской компоненте космической среды, считаем, что $\bar{T}^{\mu\nu} \approx \bar{T}_{rad}^{\mu\nu} = T_{rad}^{\mu\nu}$. С учётом этого, обобщённые уравнения Эйнштейна (14), применительно к описанию динамики Вселенной, приближённо записываем в виде:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} - \frac{8\pi C}{c^4}T_{rad}^{\mu\nu}. \quad (17)$$

При описании динамики космической среды, в которой процессы рождения и аннигиляции частиц являются существенными, $\bar{T}^{\mu\nu} \neq T_{rad}^{\mu\nu}$. Это означает, что уравнения (17) пригодны для описания динамики Вселенной лишь при температурах $T \leq 6 \cdot 10^9 \text{ K}$ (красные смещения $z \leq 2 \cdot 10^9$), когда процессы рождения и аннигиляции частиц практически не влияют на динамику Вселенной [1, 2]. При больших температурах космической среды, эти процессы являются существенными и поэтому, необходимо использовать

уравнения (14).

Вследствие наличия дополнительного слагаемого в правой части уравнения (14), динамика Вселенной может принципиально отличаться от общепринятой. Может отсутствовать сингулярность в решениях, описывающих динамику Вселенной, иметь место её ускоренное расширение в радиационно-доминированную (RD) эпоху (см. пункт 4).

3. ОБОБЩЁННЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ФРИДМАНА

Используя обобщённые уравнения Эйнштейна (17), стандартным образом преобразуем их в космологические уравнения Фридмана. Для двухкомпонентной космической среды они могут быть записаны в виде:

$$3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k_0 c^2}{a^2} \right) = 8\pi G(\rho_M + \rho_{rad}) - 8\pi \mathbb{C} \rho_{rad}, \quad (18)$$

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k_0 c^2}{a^2} \right) = -\frac{8}{3} \pi G \rho_{rad} + \frac{8}{3} \pi \mathbb{C} \rho_{rad}. \quad (19)$$

При получении этих уравнений считали, что $P_{rad} = (1/3)\varepsilon_{rad}$, $P_M = 0$, $\varepsilon_M = \rho_M c^2$, $\varepsilon_{rad} = \rho_{rad} c^2$. Параметр k_0 характеризует тип геометрии пространства. Будет показано, что его значение определяется полной энергией космической среды в расчёте на единицу массы (см. формулу (30)) и оно может быть произвольным (см. Приложение).

Имея ввиду применение уравнений (18), (19) к описанию расширения Вселенной, будем учитывать, что их решения, в пределе исчезающе малого влияния материи на метрические свойства пространства, должны переходить в одно из решений уравнения (15). Считаем, что этим решением является то из них, которое описывает расширение пустого пространства со скоростью света.

Уравнения Фридмана (18), (19) запишем в безразмерном виде:

$$\frac{1}{\bar{a}^2} \left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{t}} \right)^2 = k_0 \frac{\Omega_{curv}}{\bar{a}^2} + \frac{\Omega_M}{\bar{a}^3} + \frac{\Omega_{rad}}{\bar{a}^4} (1 - \alpha), \quad (20)$$

$$\frac{d^2 \bar{a}}{d\bar{t}^2} = -\frac{\Omega_M}{2\bar{a}^2} - \frac{\Omega_{rad}}{\bar{a}^3} (1 - \alpha). \quad (21)$$

где $\bar{a} = a/a_0$, $\bar{t} = t \cdot H_0$, H_0 – постоянная Хаббла. Безразмерный параметр $\alpha = \mathbb{C}/G$. Здесь и далее значок «0» используется для обозначения величин, определяющих параметры современной Вселенной. Используются стандартные обозначения [11]:

$$\Omega_M = \frac{\rho_{M0}}{\rho_c}, \quad \Omega_{rad} = \frac{\rho_{rad0}}{\rho_c}, \quad \Omega_{curv} = \frac{c^2}{H_0^2 a_0^2}. \quad (22)$$

Постоянную Хаббла часто записывают в виде: $H_0 = h \cdot 100$ км/с Мпк. Параметры Ω_M и Ω_{rad} определяют в единицах ρ_c современные плотности нерелятивистской и релятивистской компонент космической среды, соответственно. Величина критической плотности ρ_c определяется формулой:

$$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G = 1.88 \cdot 10^{-29} h^2 \text{ г/см}^3. \quad (23)$$

Решения уравнений (20), (21) удовлетворяют начальным условиям:

$$\bar{a}(\bar{t}_0) = 1, \quad (d\bar{a}/d\bar{t})(\bar{t}_0) = 1. \quad (24)$$

Считаем, что современной Вселенной соответствует момент времени t_0 .

4. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ С УЧЁТОМ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

4.1. С-модель (С — centrifugal)

Космологическую модель Вселенной, в основе которой лежат уравнения (20) (21) называем, для краткости, С-моделью. Параметрами С-модели являются:

$$\Omega_{curv}, \Omega_M, \Omega_{rad}, k_0, \alpha \text{ и } h. \quad (25)$$

Вследствие (20), (24) они связаны соотношением:

$$k_0 \Omega_{curv} + \Omega_M + \Omega_{rad} (1 - \alpha) = 1. \quad (26)$$

В рамках С-модели возможны различные решения, описывающие динамику Вселенной. Для качественного анализа этих решений, уравнение (21) запишем в виде:

$$\frac{d^2\bar{a}}{d\bar{t}^2} = -\frac{dU_C(\bar{a})}{d\bar{a}}, \quad (27)$$

где

$$U_C(\bar{a}) = -\frac{1}{2} \frac{\Omega_M}{\bar{a}} - \frac{1}{2}(1 - \alpha) \frac{\Omega_{rad}}{\bar{a}^2}. \quad (28)$$

Уравнение (27) аналогично уравнению описывающему одномерное движение частицы в потенциальном поле [20]. Вид решений $\bar{a}(\bar{t})$ уравнения (27) зависит от вида потенциала $U_C(\bar{a})$, а также от значения энергии

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{t}} \right)^2 + U_C(\bar{a}) = \frac{k_0}{2} \Omega_{curv} = \frac{E}{H_0^2 a_0^2}. \quad (29)$$

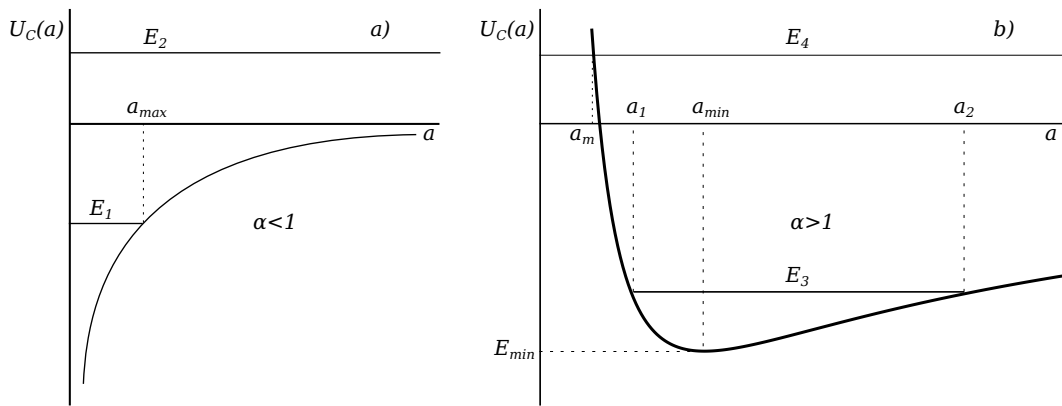


Рис. 1. Графики функции $U_C(a)$, определяемой формулой (28).

Энергия E является первым интегралом уравнения (27).

Из (29) видно, что параметр k_0 , определяющий тип геометрии пространства, связан с энергией E соотношением:

$$k_0 = 2E/c^2. \quad (30)$$

Соотношение (29) рассматриваем как закон сохранения полной энергии космической среды в расчёте на единицу массы. Для решений, описывающих безграничное расширение Вселенной, учитывая, что частицы при $a \rightarrow \infty$ становятся свободными, полагаем $E = c^2$. Из (30) видно, что в этом случае значение параметра $k_0 = 2$.

Графики схематично изображающие функцию $U_C(a)$ приведены на рис. 1. Они качественно отличаются для случаев $\alpha \leq 1$ и $\alpha > 1$. Решения, описывающие динамику Вселенной в рамках С-модели, схематично изображены на рис. 2.

При $\alpha \leq 1$ Вселенная рождается в момент «Большого взрыва». Силы отталкивания всегда меньше, чем силы притяжения. Расширение происходит с замедлением. При $E < 0$ Вселенная является замкнутой, а при $E \geq 0$ открытой (см. рис. 2а.).

В решениях с $\alpha > 1$ отсутствует сингулярность, существует состояние, когда Вселенная имеет минимальный масштаб и максимальную температуру. При $\alpha > 1$ и $E < 0$ Вселенная является замкнутой и осциллирующей. Возможно устойчивое стационарное состояние Вселенной с $E = E_{min}$. Решения с $\alpha > 1$ и $E \geq 0$ описывают открытую Вселенную, (см. рис. 2б.).

По-видимому, интересными, с точки зрения приложения С-модели для описания Вселенной, являются решения для которых параметр α больше единицы, но очень мало от неё отличается. Согласно этим решениям, сингулярное состояние Вселенной

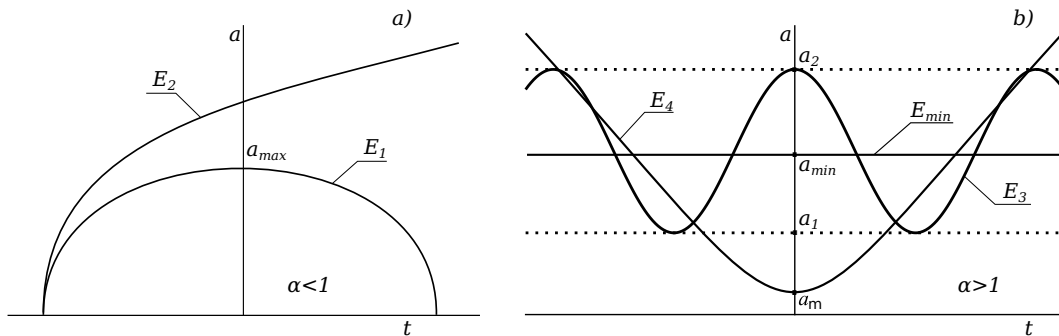


Рис. 2. Схематично приведен качественный вид решений уравнения (27) для различных значений параметра α и энергии E . Уровни энергий приведены на рис. 1.

отсутствует, хотя она и может иметь очень маленький минимальный масштаб и очень большую максимальную температуру. Расширению Вселенной предшествует сжатие.

4.2. S-модель (S — simple)

При $\alpha > 1$ и $a < a_{min}$ (см. рис. 1b.), определяющую роль в ранней Вселенной играют космологические силы отталкивания. Под действием этих сил Вселенная ускоренно расширяется. При расширении силы отталкивания спадают обратно пропорционально кубу, а притяжения квадрату масштаба Вселенной. При $a > a_{min}$ определяющими динамику Вселенной становятся силы притяжения. В решениях с уходом Вселенной на бесконечность, в предлагаемой нами интерпретации уравнений Фридмана, энергия $E = c^2$, а значение параметра $k_0 = 2$. Спадающие с ростом радиуса кривизны силы притяжения не могут существенно изменить скорость расширения в области $a \gg a_{min}$. При этом, если $a_{min} \ll a_0$, то подавляющую часть времени Вселенная расширяется почти с постоянной скоростью $\dot{a}(t) \approx \dot{a}_\infty = \sqrt{2}c$. Хорошим приближением для описания её динамики в области $a \gg a_{min}$ является модель равномерно расширяющейся Вселенной (S-модель) [21]. Уравнения Фридмана, описывающие эту модель имеют предельно простой вид:

$$\dot{a} = \sqrt{2}c, \quad \ddot{a} = 0. \quad (31)$$

Учитывая начальные условия (24), заключаем, что S-модель содержит лишь один независимый параметр — постоянную Хаббла h . S-модель является приближением S-модели. Как показывает сравнение расчётов с наблюдениями, это приближение явля-

ется хорошим, по крайней мере, в области красных смещений $z \lesssim 1300$ [21].

5. ОБЪЯСНЕНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

В этом разделе приведём объяснение некоторых наиболее важных космологических наблюдений. Для полноты и возможности сравнения, наряду с результатами полученными в рамках С-модели, приводим также соответствующие результаты, полученные в рамках S- и Λ CDM-моделей. Подробности о популярной современной космологической модели Λ CDM см., например, в [11]. Величины, рассчитанные в рамках С-, S- и Λ CDM-моделей будем обозначать индексами С, S и Λ , соответственно. При интерпретации наблюдательных данных считаем, что Вселенная является открытой.

5.1. Зависимость «видимая звездная величина — красное смещение» для сверхновых типа Ia

Один из способов проверки правильности космологической модели, основан на сравнении теоретически рассчитанной в рамках этой модели и реально наблюдаемой зависимости: «видимая звёздная величина — красное смещение» для источников, чья абсолютная светимость L предполагается известной, а красное смещение z измеренным (см., например, [6–9]).

Для расчёта этой зависимости используем формулу:

$$(m - M)(z) = 5 \lg [(1 + z)\bar{r}(z)] + 5 \lg (c H_0^{-1}/l_0), \quad (32)$$

где $\bar{r}(z) = r(z)/cH_0^{-1}$, $m = -2.5 \lg E + const$, $M = -2.5 \lg E_1 + const$, $E = L/4\pi r^2(z)(1+z)^2$, $E_1 = L/4\pi l_0^2$, $l_0 = 10$ пс (подробности, см., например, в [1, 21]).

Фотометрическое расстояние $r(z)$ рассчитываем по формуле:

$$r(z) = a_0 \text{sh} \chi(z), \quad \chi(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{a_0(\dot{a}/a)_{z'}}. \quad (33)$$

см., например, в [11, 21]. Предполагаем, что Вселенная является открытой.

Формулу, определяющую фотометрическое расстояние $\bar{r}_\Lambda(z)$ в Λ CDM-модели запишем в виде, см., например, [11, гл.4]:

$$\bar{r}_\Lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{curv}}} \text{sh} \int_0^z \frac{\sqrt{\Omega_{curv}} dz'}{\sqrt{\Omega_{curv} (1+z')^2 + \Omega_M (1+z')^3 + \Omega_{rad} (1+z')^4 + \Omega_\Lambda}}. \quad (34)$$

Параметры Λ CDM-модели Ω_{curv} , Ω_M , Ω_{rad} и Ω_Λ связаны соотношением:

$$\Omega_{curv} + \Omega_M + \Omega_{rad} + \Omega_\Lambda = 1. \quad (35)$$

Обычно для интерпретации наблюдений используется «плоская Λ CDM-модель» в которой полагают $\Omega_{curv} = 0$. Предсказания Λ CDM-модели с Ω_{curv} , заметно отличающимся от нуля, противоречат наблюдениям, см., например, [11]. Результат $\Omega_{curv} \approx 0$, является лишь следствием подгонки Λ CDM-модели для объяснения наблюдений, и не более того.

Стандартная математическая процедура выбора теоретически рассчитанной зависимости $(m - M)_\Lambda(z)$, наилучшим образом описывающей наблюдательные данные по сверхновым типа Ia, показывает, что это имеет место при $\Omega_M \approx 0.27$, $\Omega_\Lambda \approx 0.73$, см. [8–10]. Учитывая это, при расчётах используем следующие значения параметров Λ CDM-модели:

$$\Omega_{curv} = 0, \quad \Omega_M = 0.27, \quad \Omega_{rad} = (4.2/h^2) \cdot 10^{-5}, \quad h = 0.7, \quad \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M - \Omega_{rad}. \quad (36)$$

Значения параметров Λ CDM-модели, в значительной степени, являются не результатом непосредственных измерений, а следствием их подгонки для правильного объяснения различных космологических наблюдений.

Формулу, определяющую $\bar{r}_C(z)$ в C-модели, учитывая (20) и (33), запишем в виде:

$$\bar{r}_C(z) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{curv}}} \operatorname{sh} \int_0^z \frac{\sqrt{\Omega_{curv}} dz'}{\sqrt{2\Omega_{curv}(1+z')^2 + \Omega_M(1+z')^3 + \Omega_{rad}(1-\alpha)(1+z')^4}}. \quad (37)$$

Параметры C-модели связаны соотношением:

$$2\Omega_{curv} + \Omega_M + (1-\alpha)\Omega_{rad} = 1. \quad (38)$$

Оценочные расчёты показывают, что космологические наблюдения, взятые из широкой области красных смещений z ($0 < z \lesssim 1300$), хорошо объясняются в рамках C-модели, имеющей следующие параметры:

$$\Omega_M = 0.27, \quad \Omega_{rad} = (4.2/h^2)10^{-5}, \quad \alpha = 1, \quad h = 0.6, \quad k_0 = 2. \quad (39)$$

Учитывая (31) и (33), формулу, определяющую $r_S(z)$ в S-модели, запишем в виде:

$$\bar{r}_S(z) = \sqrt{2} sh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1+z) \right]. \quad (40)$$

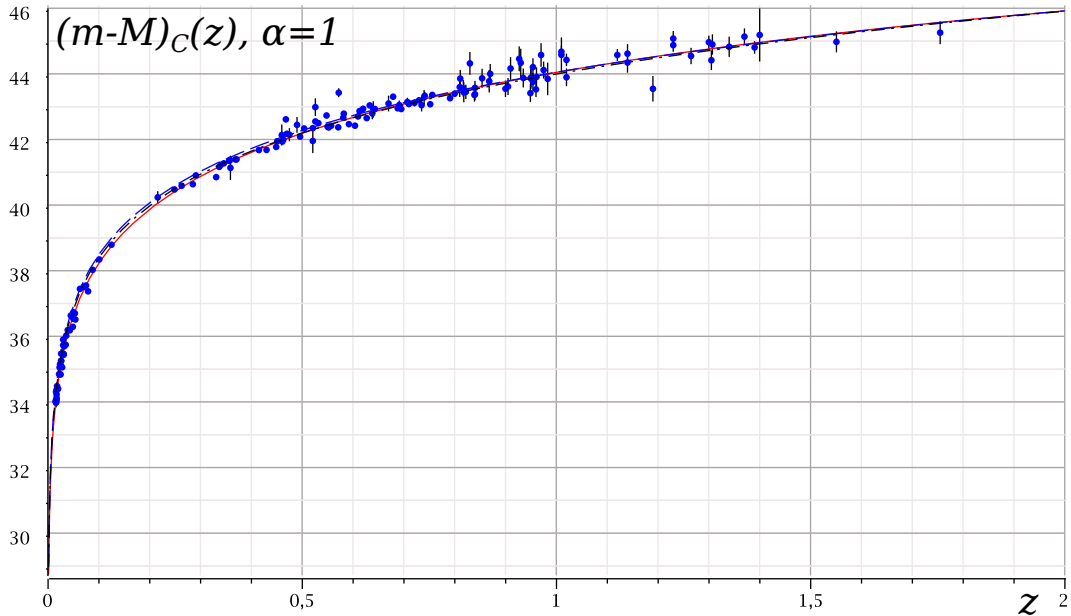


Рис. 3. Зависимость $(m - M)_C(z)$ при значении параметров (39). Для сравнения приведены графики зависимостей $(m - M)_\Lambda(z)$, для «стандартных» значений (36) и $(m - M)_S(z)$ для значения параметра $h = 0.65$. Точками на рисунке приведены наблюдаемые значения $(m - M)(z)$, вертикальными отрезками – их ошибки измерения. Наблюдательные данные взяты из [8, 9].

На рис. 3. приведены графики зависимости $(m - M)(z)$ рассчитанные в рамках Λ CDM-, C- и S- моделей. Видно, что все приведённые графики хорошо описывают наблюдаемую зависимость $(m - M)(z)$ для сверхновых типа Ia.

5.2. Анизотропия реликтового излучения

Изучение тонкой структуры реликтового излучения показывает, что на равномерном его фоне имеются незначительные отклонения, см., например, [10–12]. Наблюдаются слабые вариации температуры реликтового фона на уровне нескольких тысячных долей процента. Следуя [22, 23] считают, что они являются свидетельством существования слабых неоднородностей сжатий и разряжений в космической среде в эпоху рекомбинации.

Особенно интересны самые яркие пятна на картине реликтового фона. Наблюдения чётко выявляют наличие определённого угла $\Delta\theta$ между направлениями в пространстве на центры двух соседних ярких пятен. Этот угол с точностью один-два процента равен

одному градусу [10, 11]. Соотношение между угловым и линейным размером наблюдаемого объекта зависит от вида уравнений, описывающих расширение Вселенной, а также параметров космической среды.

Предполагая, что неоднородности на равномерном фоне реликтового излучения возникли в момент рекомбинации, формулу, определяющую угол между центрами ярких пятен запишем в виде:

$$\Delta\theta = \frac{2\bar{t}_{rec}(1+z_{rec})}{\bar{r}(z_{rec})} \cdot \frac{180}{\pi}. \quad (41)$$

Значение угла берётся в градусах (см., например, в [21]). В формуле (41) t_{rec} , z_{rec} — возраст Вселенной и красное смещение на момент рекомбинации, соответственно.

Возраст Вселенной в момент рекомбинации \bar{t}_{rec} находим из условия:

$$\bar{a}(\bar{t}_{rec}) = a(\bar{t}_{rec})/a_0 = 1/(1+z_{rec}). \quad (42)$$

Функцию $\bar{a}(\bar{t})$ находим, решая уравнения описывающие динамику Вселенной.

В Λ CDM-модели, для значений параметров (36) и $z_{rec} = 1000$ получаем для времени рекомбинации значение $t_{rec} = 4.4 \cdot 10^5$ лет, а для угла значение $\Delta_\Lambda\theta = 1.09^\circ$. Подгонкой параметров модели расчётную величину угла можно согласовать с наблюдаемой.

Для значений параметров (39) в рамках S-модели получаем:

$$\Omega_{curv} \approx 0.37, t_{rec} \approx 6.6 \cdot 10^5 \text{ лет}, \Delta_C\theta \approx 1.03^\circ. \quad (43)$$

Это расчётное значение угла $\Delta_C\theta$ согласуется с наблюдаемым. При значениях параметров (39), S-модель хорошо объясняет также и наблюдаемую зависимость $(m-M)(z)$ для сверхновых типа Ia, см. рис. 3.

Расчёты, приведённые в рамках S-модели, правильно объясняют наблюдаемый угол $\Delta_S\theta$, если считать, что $h = 0.65$, а $z_{rec} = 1300$. В этом случае $t_{rec} = 1.5 \cdot 10^7$ лет, $\Delta_S\theta = 1.02^\circ$.

5.3. Возраст Вселенной

Для определения возраста Вселенной находили решения уравнений, описывающих динамику Вселенной. В расчётах полагали, что современной Вселенной соответствует момент времени $\bar{t} = \bar{t}_0$, а минимальный размер она имела при $\bar{t} = 0$. Учитывая, что

$t = \bar{t} H_0^{-1}$, возраст Вселенной t_0 определяли по формуле:

$$t_0 = \bar{t}_0 H_0^{-1}. \quad (44)$$

Проводя расчёты в рамках Λ CDM-модели, при значениях параметров (36), получили: $t_0 = 13.9 \cdot 10^9$ лет. При значениях параметров (39), расчёты в рамках С-модели дали $t_0 = 13.4 \cdot 10^9$ лет.

Возраст t_0 Вселенной и постоянная Хаббла H_0 в S-модели связаны соотношением:

$$t_0 = H_0^{-1}. \quad (45)$$

Учитывая, что $H_0 = h \cdot 100 \text{ км/с}$, $h = 0.6 \div 0.7$, находим, что $t_0 \geq 14 \cdot 10^9$ лет.

В заключение отметим следующее.

Проведение расчётов в рамках Λ CDM- и С- моделей в режиме онлайн доступно на нашем сайте www.cosmoway.ru (см. раздел моделирование). Меняя любой из параметров этих моделей, можно видеть, как это влияет на динамику Вселенной.

Применение предлагаемого инструмента для объяснения наблюдений в рамках С-модели показывает, что параметры Вселенной таковы, что она уже достаточно давно расширяется практически равномерно (по крайней мере в области красных смещений $z \leq 1300$). Хорошим приближением С-модели для описания динамики Вселенной в области красных смещений ($0 < z \leq 1300$) является модель равномерно расширяющейся Вселенной. Она содержит лишь один свободный параметр - постоянную Хаббла. Этот параметр имеет ясный смысл и достаточно точно измеряется.

Приведённые выше объяснения наблюдений в рамках С- и S- моделей, основаны на понятных и простых физических представлениях. Из приведённых расчётов, в рамках этих моделей, не следует, что трёхмерное пространство является плоским, не следует также, что современная Вселенная расширяется с ускорением. Эти широко декларируемые выводы могут быть ошибочными.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Высказано предположение, что космологические силы отталкивания имеют чисто геометрическую природу. Это предположение основано на следующей идее. Космологическое расширение Вселенной сопровождается увеличением длин волн

частиц. В сопутствующей трёхмерной системе отсчёта длины волн частиц λ изменяются пропорционально масштабу Вселенной a . Уменьшение энергии частиц $\varepsilon_\lambda = hc/\lambda \sim 1/a$, имеющее чисто геометрическую природу, сопровождается одновременным и одинаковым увеличением энергии частиц, определяющей скорость космологического расширения. Увеличение скорости расширения в сопутствующей системе отсчёта трактуем как результат действия космологических сил отталкивания. Описание этих сил в уравнениях Эйнштейна не содержится и поэтому они являются не полными.

2. Ранее, для объяснения природы космологических сил отталкивания использовалась идея о четвёртом пространственном измерении и центробежных силах, действующих в этом измерении [19, 24, 25]. Как видно из настоящей статьи эта идея не является необходимой для объяснения причины возникновения космологических сил отталкивания.
3. Для описания в рамках ОТО космологических сил отталкивания, в тензоре энергии-импульса выделяем волновую часть $\bar{T}^{\mu\nu}$. Для идеальной космической среды этот тензор определяется формулой:

$$\bar{T}^{\mu\nu} = P_w (4 u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}). \quad (46)$$

В однородной изотропной Вселенной волновое давление P_w , плотность волновой энергии ε_w и масштаб Вселенной a связаны соотношениями:

$$P_w = \frac{1}{3} \varepsilon_w, \quad \varepsilon_w a^4 = const. \quad (47)$$

Считаем, что тензор $\bar{T}^{\mu\nu}$ является не только источником гравитационного поля, но одновременно и источником поля космологических сил отталкивания. С учётом этого, предложена модификация уравнений ОТО вида:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} - \frac{8\pi \mathbb{C}}{c^4} \bar{T}^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (48)$$

где \mathbb{C} — константа космологических сил отталкивания.

4. Показано, что для того чтобы решение уравнения (48), описывающее динамику однородной изотропной открытой Вселенной, в предельном случае переходило в

физически разумное решение, описывающее динамику пустого однородного расширяющегося пространства, значение космологической постоянной необходимо полагать равным нулю.

5. Для описания однородной изотропной Вселенной обобщённые уравнения Эйнштейна преобразованы в обобщённые космологические уравнения Фридмана. Предложена космологическая модель, основанная на этих уравнениях (C-модель, C-centrifugal). В C-модели космологические силы отталкивания обратно пропорциональны кубу масштаба Вселенной. Важную роль в этой модели играет параметр $\alpha = C/G$. Он определяет соотношение сил отталкивания и притяжения в радиационно доминированную эпоху.
6. При $\alpha \leq 1$ силы отталкивания, согласно C-модели, всегда меньше, чем силы притяжения. Вселенная рождается в момент «Большого взрыва» и далее расширяется с замедлением. В зависимости от значения полной энергии E , Вселенная может быть замкнутой ($E < 0$) или открытой ($E \geq 0$). Решения, описывающие C-модель, при $\alpha \leq 1$, содержат особенность в поведении характерного масштаба и термодинамических параметров, определяющих свойства космической среды при $a \rightarrow 0$.
7. При $\alpha > 1$ особенность в поведении решений, описывающих C-модель отсутствует. Согласно решениям с $\alpha > 1$, существовал момент, когда Вселенная имела минимальный масштаб и максимальную температуру. Согласно C-модели, чтобы максимальная температура была достаточно высокой необходимо предполагать, что значение параметра α лишь на очень малую величину превышает единицу. Среди решений с таким значением этого параметра, как мы полагаем, и существует то, которое описывает Вселенную. Решение, описывающее динамику Вселенной без сингулярности, состоит из двух симметричных ветвей. Одна из них описывает расширение Вселенной, другая — сжатие. Согласно этому решению, Вселенная рождается в «бесконечности» и в конце эволюции снова уходит туда.
8. Согласно решениям C-модели с $\alpha = 1 + \psi$, где ψ бесконечно малая величина, в некоторый момент Вселенная имела очень маленький масштаб и очень высокую температуру. В это время определяющими были силы отталкивания. В результате

действия этих сил, Вселенная ускоренно расширялась. При расширении силы отталкивания уменьшались обратно пропорционально кубу, а притяжения квадрату масштаба Вселенной. С течением времени определяющими в расширяющейся Вселенной стали силы притяжения. Наблюдательные данные о возрасте Вселенной, анизотропии реликтового излучения, а также зависимости «видимая звёздная величина–красное смещение» для сверхновых типа Ia, хорошо объясняются решениями С-модели, согласно которым Вселенная, за исключением относительно короткого начального периода, находится в состоянии близком к равномерному расширению. Хорошим приближением для описания её динамики является модель равномерно расширяющейся Вселенной [21]. Космологические уравнения Фридмана, описывающие эту модель имеют предельно простой вид:

$$\dot{a} = \sqrt{2}c, \quad \ddot{a} = 0. \quad (49)$$

S-модель является предельным случаем С-модели, которая и является её теоретическим обоснованием. S-модель содержит лишь один свободный параметр — постоянную Хаббла. Подбирая значение лишь одного хорошо измеряемого параметра, а не многих, как в Λ CDM-модели, можно очень просто объяснить известные космологические наблюдения в широкой области красных смещений z ($0 < z \lesssim 1300$).

- Дано объяснение возраста Вселенной.
- Приведена интерпретация наблюдаемой зависимости «видимая звёздная величина — красное смещение» для сверхновых типа Ia.
- Объяснено наблюдаемое угловое расстояние между центрами соседних ярких пятен на равномерном фоне реликтового излучения.

Авторы выражают благодарности Жилкину А.Г., Лукашу В.Н., Миллеру М.Л., Поляченко Е.В., Черепашуку А.М., Френкелю А.Л. за полезные дискуссии. Мы признательны Шухману И.Г. за многочисленные доброжелательные и полезные обсуждения работы. Выражаем благодарность Рубакову В.А. за его полезную критику работы. Ушакову Д.А. авторы благодарны за техническую помощь.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О связи геометрии Вселенной с полной энергией космической среды

При описании геометрии однородного изотропного нестационарного трёхмерного пространства Вселенной рассматриваем его как однородную изотропную нестационарную гиперповерхность в четырёхмерном евклидовом пространстве. Уравнение, описывающее эту гиперповерхность в четырёхмерных декартовых координатах (x_1, x_2, x_3, x_4) имеет вид:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = k a^2(t). \quad (50)$$

Обычно считается, что постоянная k может принимать только три значения: $k = 0, \pm 1$. При $k = 1$ реализуется случай пространства положительной кривизны. Значению $k = -1$ соответствует пространство отрицательной кривизны. Плоское пространство реализуется при $k = 0$, см., например, [1, 3].

В предлагаемом нами описании динамики Вселенной считаем, что параметр k принимает не только эти значения, но и другие.

При $k \neq 0$, используя преобразование

$$k a^2(t) = \pm b^2(t), \quad (51)$$

в котором знак $+$ при $k > 0$, а знак $-$ при $k < 0$, уравнение (50) приводим к виду:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \pm b^2(t). \quad (52)$$

Из обобщённых уравнений Эйнштейна, с учётом (52), получаем уравнения Фридмана:

$$\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 \pm \frac{c^2}{b^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{8\pi\mathbb{C}}{3c^2}\varepsilon_w, \quad (53)$$

$$2\frac{\ddot{b}}{b} + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 \pm \frac{c^2}{b^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}P + \frac{8\pi\mathbb{C}}{c^2}P_w. \quad (54)$$

Учитывая (51) уравнения (53), (54) преобразуем к виду:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k_0 c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{8\pi\mathbb{C}}{3c^2}\varepsilon_w, \quad (55)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k_0 c^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}P + \frac{8\pi\mathbb{C}}{c^2}P_w, \quad (56)$$

где $k_0 = -1/k$. Эти уравнения справедливы при любых значениях k не равных нулю. Случай $k = 0$ («плоская Вселенная») является вырожденным. Он описывается уравнениями (55), (56) если считать параметр k_0 равным нулю.

Масштабным фактором Вселенной, при $k_0 \neq 0$, является функция $b(t) = a(t)/\sqrt{|k_0|}$. При $k_0 = 0$ масштабным фактором является функция $a(t)$.

Соотношение (55) рассматриваем как закон сохранения полной энергии космической среды E , в расчёте на единицу массы. Параметр k_0 связан с энергией E соотношением (30).

-
- [1] Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. «Строение и эволюция Вселенной» (М.: Наука, 1975).
- [2] Вайнберг С. «Гравитация и космология» (М.: Платон, 2000).
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Теория поля» М.:Наука 1988.
- [4] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Д. «Гравитация» т.1-3 М:Мир 1977.
- [5] Толмен Р. «Относительность, термодинамика и космология» М:Наука 1974.
- [6] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, et al.,*Astrophys. J.* 517, 565 (1999).
- [7] A. G. Riess, A.V. Filippenko, P. Challis, et al.,*Astron. J.* 116, 1009 (1998).
- [8] P. Astier, J. Guy, N. Regnault, et al.,*Astron.and Astrophys.* 447, 31 (2006).
- [9] A. G. Riess, L.G. Strolger, S. Casertano, et al., *Astrophys. J.* 656, 98 (2007); e-Print arXiv: astro-ph/0611572 (2006).
- [10] G. Hinshaw, M.R. Nolta, C.L. Bennett, et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 170, 377 (2007).
- [11] Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков, «Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего большого взрыва». (М., 2008).
- [12] А.Д. Чернин «Тёмная энергия и всемирное антитяготение» УФН 178 267, №3 2008г.
- [13] Глиннер Э.Б. «Раздувающаяся Вселенная и вакуумоподобное состояние физической среды» УФН 172 221 №2 (2002).
- [14] Rubakov V.A. *Phys. Rev. D*61 061501 (2000).
- [15] Dabrowski M.P., Stachowiak T. *Ann. Phys. (New York)* 321771 (2006)
- [16] W. Pauli, *Theory of Relativity*, 2nd ed MacMillan (Pergamon), New York, 1958.
- [17] J. A. Wheeler, *Neutrinos, Gravitation and Geometry*, Bologna, 1960.
- [18] В.А. Клименко, А.М. Фридман «О центробежной природе "тёмной энергии"» ИАЭ-6597/1 Российский научный центр «Курчатовский институт» (2009).
- [19] А.В. Клименко, В.А. Клименко «Центробежные космологические силы отталкивания в однородной Вселенной» e-Print arXiv:1105.0815 (2011).
- [20] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Механика» М.:Наука 1965.
- [21] А.В. Клименко, В.А. Клименко, А.М. Фридман «О равномерном расширении Вселенной» *Астрономический Журнал*, т.87, №10, с.947-966 (2010)
- [22] Лифшиц Е.М. *ЖЭТФ* 16, 587 (1946).
- [23] Лифшиц Е.М., Халатников И.М., УФН 80, 391 (1963а).

- [24] А.Г. Жилкин, В.А. Клименко, акад. РАН А.М. Фридман «Об эйнштейновских силах отталкивания» Доклады Академии Наук, т435, №6 (2010).
- [25] А.Г. Жилкин, В.А. Клименко, А.М. Фридман «Динамика трёхмерных однородных изотропных релятивистских миров» *Астрономический журнал* (2010).