УДК 524.834

# Центробежные космологические силы отталкивания в однородной изотропной Вселенной

А. В. Клименко[1,*] и В. А. Клименко[2]

[1]*ООО «Бизнес и Технологии», Челябинск, Россия*

[2]*«Челябинский государственный университет», Челябинск, Россия*

Описание динамики Вселенной с учётом дополнительного четвёртого крупномасштабного пространственного измерения выявляет важный эффект –наличие космологических сил отталкивания. Источником этих сил является тепловая энергия космической среды. Они являются центробежными по своей природе и в сопутствующей трёхмерной системе координат проявляются как силы отталкивания.

Записаны космологические уравнения А.А. Фридмана, описывающие динамику однородной изотропной Вселенной с учётом центробежных сил отталкивания. Предложена космологическая модель Вселенной, основанная на этих уравнениях. Рассмотрены приложения модели для объяснения наблюдений.

*Ключевые слова: космология, эйнштейновские силы отталкивания, $\Lambda$-член, центробежные силы.*

Настоящая работа является уточнением и развитием исследований, посвященных изучению природы космологических сил отталкивания, выполненных нами ранее с академиком РАН А.М. Фридманом. Светлой памяти этого замечательного человека и известного Российского физика посвящаем эту работу.

* Electronic address: alklimenko@gmail.com

СОДЕРЖАНИЕ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Еще сравнительно недавно считали, что динамику Вселенной определяют силы тяготения (см., например, [1–3]). В настоящее время существуют многочисленные наблюдательные данные для объяснения которых необходимо предполагать существование космологических сил отталкивания. Есть веские основания считать, что динамика Вселенной в значительной степени определяется влиянием этих сил (см., например, [4–10]).

Распространённым является мнение, что космологические силы отталкивания это то, что описывается $\Lambda$-членом в уравнениях Эйнштейна (см., например, [9, 10]). Введение Эйнштейном $\Lambda$-члена в уравнения общей теории относительности (ОТО) в работе [11] было связано с его представлениями о свойствах Вселенной. При написании этой работы он был убеждён, что Вселенная является не только однородной и изотропной, но и стационарной. Для объяснения стационарности Вселенной Эйнштейну пришлось предположить, что наряду с силами тяготения в природе существуют также и силы отталкивания. Он считал, что равновесие этих сил обеспечивает стационарность Вселенной. Связать космологические силы отталкивания с известными свойствами материи Эйнштейн не смог. Он предположил, что эти силы связаны с чем-то другим. Это нечто ($\Lambda$-член) создает неустранимую кривизну пространства-времени, которая и является источником космологических сил отталкивания.

В дальнейшем, после того как из анализа наблюдений стало ясно, что Вселенная не является стационарной, Эйнштейн утратил интерес к проблеме космологических сил отталкивания. Зачем вводить в ОТО $\Lambda$-член, если нестационарность Вселенной можно объяснить и без него?

Ситуация кардинально изменилась в последнее десятилетие. Стало понятно, что для объяснения многих наблюдательных данных необходимо предполагать существование космологических сил отталкивания. Популярность концепции $\Lambda$-члена снова резко возросла. Часто утверждается, что именно $\Lambda$-член и дает правильное описание космологических сил отталкивания (см., например, [9, 10]).

Распространенным является утверждение, что источником космологических сил отталкивания, описываемых $\Lambda$-членом (далее называемых эйнштейновскими), является некоторая вакуумоподобная среда, называемая «тёмной энергией» [9, 10, 12, 13]. Считают, что плотность энергии $\varepsilon_\Lambda$ и давление $P_\Lambda$ «тёмной энергии» определяются формулами:

$$\varepsilon_\Lambda = c^4\Lambda/8\pi G, \quad P_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda, \tag{1}$$

где $G$ - гравитационная постоянная, $c$ - скорость света, $\Lambda$-космологическая постоянная. Полагают, что $\Lambda > 0$. Можно показать, что формула, определяющая космологическое ускорение создаваемое «тёмной энергией» в однородной изотропной Вселенной имеет вид (см., например, [1, гл.4]):

$$\ddot{a}_\Lambda = -\frac{4}{3}\pi G\frac{a}{c^2}(\varepsilon_\Lambda + 3P_\Lambda) = \frac{1}{3}\Lambda c^2 a, \tag{2}$$

где $a(t)$ – радиус кривизны Вселенной. Точка означает производную по времени.

Для Эйнштейновских сил отталкивания, источником которых является $\varepsilon_\Lambda$ и $P_\Lambda$, важно, что $\varepsilon_\Lambda > 0$, а $P_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda < 0$, вследствие чего эти силы и возникают. В тоже время следует обратить внимание и на то, что поле эйнштейновских сил существует даже при $G \equiv 0$. Вследствие этого, естественно считать, что это поле является независимым от гравитационного поля. Естественно также предполагать, что и источником эйнштейновских сил отталкивания является не гипотетическая «тёмная энергия», параметры которой зависят от гравитационной постоянной $G$ (см. формулу (1)), а нечто другое, не зависящее от $G$.

В работах [14, 15] рассмотрены модели однородных центрально-симметричных безграничных гравитирующих систем. Они являются вариантом космологических моделей («Мир на бране»), в которых Вселенная рассматривается, как трёхмерная брана в четырёхмерном пространстве [16]. Однако в отличие от предыдущих работ (см., например, обзор [17]), посвященных развитию различных аспектов этой модели, в работах [14, 15] учитывались не только нормальные к бране скорости космической среды, но и тангенциальные скорости. Учёт тангенциальных скоростей позволяет описать центробежные силы, действующие на каждый элемент браны в направлении внешнего для неё пространственного измерения. Важным в этих исследованиях является предположение о существовании такого измерения. С точки зрения типичных наблюдателей, находящихся на бране, эти силы проявляются как космологические силы отталкивания. В настоящей работе исследование динамики идеализированных однородных изотропных миров заполненных излучением, начатое в [14, 15], продолжено.

Дано наглядное кинематическое объяснение космологических сил отталкивания в этих мирах. Показано, что они являются центробежными по своей природе. Записаны обобщённые уравнения Эйнштейна, учитывающие эти силы. Источником этих сил является тепловая энергия космической среды. Во Вселенной подавляющая часть этой энергии сосредоточена в однородно распределенной в пространстве релятивистской компоненте космической среды. Получены уравнения, описывающие динамику однородной изотропной Вселенной с учётом центробежных сил. Чтобы показать, что предлагаемое объяснение космологических сил отталкивания имеет отношение к реальности, полученные уравнения использованы для объяснения наблюдательных данных.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 рассмотрена динамика релятивистских однородных изотропных миров. Показано, что силы отталкивания в этих мирах являются центробежными по своей природе и не описываются в рамках стандартных уравнений Эйнштейна. Обобщённые уравнения Эйнштейна, позволяющие описать эти силы в однородных изотропных средах записаны в разделе 3. В этом разделе приведены также обобщённые космологические уравнения А.А. Фридмана, описывающие динамику Вселенной с учётом действия центробежных сил. В разделе 4 предложена кинематическая космологическая модель Вселенной. Примеры использования предложенной космологической модели для объяснения некоторых важных для космологии наблюдательных данных содержатся в разделе 5. В разделе 6 приведён краткий перечень полученных результатов. В приложении содержится исследование динамики идеализированной нерелятивистской вселенной с учетом влияния центробежных сил.

## 2. ДИНАМИКА ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ МИРОВ

### *2.1. Постановка задачи*

Изучим динамику идеализированного изотропного трёхмерного мира однородно заполненного излучением. Далее этот мир обозначаем как $3\mathbb{R}$-мир ($\mathbb{R}$ – Relativistic). Вначале, для простоты, исследование проведем в предположении отсутствия влияния космологического гравитационного поля. Для наглядности $3\mathbb{R}$-мир рассматриваем как трёхмерную однородную изотропную нестационарную гиперсферу радиус кривизны которой $a(t)$. В окончательном варианте описания динамики $3\mathbb{R}$-миров учтено влияние гравитационного поля, а также учтена возможность существования $3\mathbb{R}$–миров с отрицательной кривизной (см. пункт 4). Считаем, что сферический $3\mathbb{R}$-мир погружен в четырёхмерное плоское евклидово пространство. Для исследования динамики $3\mathbb{R}$-мира используем две системы координат: четырёхмерную сферическую $K_4(r, \chi, \theta, \varphi)$, с началом в центре гиперповерхности, а также сопутствующую трёхмерную нестационарную полярную систему координат $K_3(R_3 = a_3(t_3)\chi, \theta, \varphi)$. Длина $a_3(t_3)$ является масштабным фактором системы $K_3$. Здесь и далее значки «3» и «4» обозначают величины относящиеся к системам координат $K_3$ и $K_4$, соответственно. Рассмотрим два случая. В первом $3\mathbb{R}$-мир является холодным, а во втором горячим.

### *2.2. Динамика холодного $3\mathbb{R}$-мира*

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ в системе $K_4$ частицы излучения, далее, для краткости, называемые фотонами, находятся на трёхмерной гиперсфере радиуса $a_m$ однородно заполняют её и движутся строго радиально от её центра. Поскольку все фотоны в любой точке системы $K_4$ движутся одинаково, то излучение, заполняющее $3\mathbb{R}$-мир, является холодным. Этот мир равномерно расширяется со скоростью света $c$. Уравнение, описывающее его динамику, имеет вид:

$$\frac{d^2 a_4}{dt_4^2} = 0. \tag{3}$$

Решением уравнения (3), удовлетворяющим начальным условиям

$$a_4(0) = a_m, \ \frac{da_4(0)}{dt_4} = c, \tag{4}$$

является функция:

$$a_4(t_4) = a_m + c\, t_4. \tag{5}$$

Эволюция холодного $3\mathbb{R}$-мира начинается в момент $t_4 = -a_m/c$ из сингулярного состояния. Использовать сопутствующую систему координат $K_3$, «вмороженную» в расширяющийся холодный $3\mathbb{R}$-мир не удается. Этот случай для введения сопутствующей системы координат является вырожденным.

### *2.3. Динамика горячего $3\mathbb{R}$-мира*

Предположим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ $3\mathbb{R}$-мир имел минимальный размер $a_m$. Это означает, что в системе координат $K_4$ все фотоны в начальный момент находились на гиперсфере радиуса $a_m$ и имели лишь тангенциальные скорости $(V_r(0) = 0, \ V_t(0) = c)$.

Начальное состояние $a(0) = a_m$ $3\mathbb{R}$-мира не является равновесным. Вследствие этого $3\mathbb{R}$-мир расширяется, причем неравномерно. Рассмотрим его динамику в системах координат $K_4$ и $K_3$.

### *2.3.1. Динамика в системе координат* $K_4$

Функция $a_4(t_4)$, описывающая динамику горячего $3\mathbb{R}$-мира в системе координат $K_4$ определяется формулой:

$$a_4(t_4) = \sqrt{a_m^2 + c^2 t_4^2}. \tag{6}$$

Она является решением уравнения

$$\frac{d^2 a_4}{dt_4^2} = \frac{a_m^2 c^2}{a_4^3} \tag{7}$$

с начальными условиями

$$a_4(0) = a_m, \quad \frac{da_4(0)}{dt_4} = 0. \tag{8}$$

В системе $K_4$ тангенциальная компонента скорости фотонов, находящихся на расстоянии $a_4(t_4)$, определяется формулой:

$$V_t(t_4) = c\, a_m / a_4(t_4). \tag{9}$$

С учётом (9), уравнение (7) запишем в виде:

$$\frac{d^2 a_4}{dt_4^2} = -\frac{d}{da_4}\left(\frac{V_t^2}{2}\right) = \frac{V_t^2}{a_4}. \tag{10}$$

Формально (10) можно рассматривать как уравнение, описывающее в рамках механики сплошной среды расширение $3\mathbb{R}$-мира под действием сил отталкивания. Как видно из (10), источником этих сил в системе $K_4$ является энергия

$$V_t^2/2 = \frac{c^2 a_m^2}{2\, a_4^2}. \tag{11}$$

Силы отталкивания являются центробежными по своей природе. Происхождение этих сил «чисто геометрическое». В задачах о движении в центральном поле (см., например, [18, §14]) энергию, определяемую формулой (11), называют центробежной. В рассматриваемой здесь задаче этот термин целесообразно сохранить.

Учитывая изотропность распределения тангенциальных скоростей, энергию $V_t^2/2$ можно рассматривать также и как тепловую энергию, а уравнение (11) как первое начало термодинамики. Можно показать, что оно описывает адиабатическое расширение релятивистского газа с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$. В системе координат $K_4$ этот газ является холодным в радиальном направлении и горячим в тангенциальном.

В рамках стандартных уравнений Эйнштейна центробежные космологические силы отталкивания в $3\mathbb{R}$-мире описаны быть не могут (см. пункт 3.3.3). Для их описания эти уравнения должны быть обобщены. Методика введения в уравнения Эйнштейна космологических сил отталкивания, ранее описаная в [19], уточнена и для удобства читателей приведена в разделе 3 настоящей работы.

Пятимерное пространство-время, связанное с системой координат $K_4$, является плоским. Геодезическими в этом пространстве являются прямые. Каждая частица $3\mathbb{R}$-мира в системе $K_4$ движется равномерно и прямолинейно. В то же время четырёхмерное пространство-время, связанное с системой координат $K_3$ является кривым и расширяется неравномерно.

### *2.3.2. Динамика в системе отсчета $K_3$*

Чтобы описать динамику $3\mathbb{R}$-мира в системе $K_3$ удобно использовать понятие «типичные наблюдатели». Типичные наблюдатели — это абстрактные тождественные объекты однородно заполняющие $3\mathbb{R}$-мир и движущиеся радиально в системе $K_4$ со скоростью $da_4/dt_4$. Считаем, что с любым типичным наблюдателем можно связать собственную для него *одномерную* прямолинейную систему координат $K_{34}$, движущуюся вдоль радиальной координаты системы $K_4$. Типичный наблюдатель находится в начале координат системы $K_{34}$ и движется в системе $K_4$ со скоростью $da_4/dt_4$. Считаем, что собственное время $t_{34}$ типичного наблюдателя в системе $K_{34}$, а также время $t_3$ сопутствующей системы координат $K_3$, являются тождественными понятиями и далее времена $t_{34}$ и $t_3$ не различаем. Учитывая инвариантность интервала между двумя бесконечно близкими событиями найдем связь между временем $t_4$ системы $K_4$ и временем $t_3$ системы $K_3$. Пусть $dt_3$ время между событиями происходящими с типичным наблюдателем в системе $K_3$, а $dt_4$ в системе $K_4$. Справедливо равенство:

$$c^2 dt_3^2 = c^2 dt_4^2 - da_4^2, \tag{12}$$

где $da_4$ – расстояние на которое сместился типичный наблюдатель от центра $3\mathbb{R}$-мира в системе $K_4$ за время $dt_4$ между рассматриваемыми событиями. Из (12) находим:

$$dt_3 = dt_4\sqrt{1 - \frac{(da_4/dt_4)^2}{c^2}}. \tag{13}$$

Учитывая (6), получаем:

$$\frac{da_4}{dt_4} = \frac{c^2 t_4}{\sqrt{a_m^2 + c^2 t_4^2}}. \tag{14}$$

Из (13), с учётом (14), находим:

$$dt_3 = \frac{a_m dt_4}{\sqrt{a_m^2 + c^2 t_4^2}}. \tag{15}$$

Интегрируя (15), и считая что моменту $t_4 = 0$ соответствует момент $t_3 = 0$, находим:

$$t_3 = t_m \operatorname{arcsh}\frac{t_4}{t_m}, \tag{16}$$

где $t_m = a_m/c$. Эта формула определяет соответствие между показаниями $t_3$ часов типичного наблюдателя и показаниями часов $t_4$ системы $K_4$, мимо которых он пролетает.

Учитывая, что $da_4/dt_4 = (da_4/dt_3)\cdot(dt_3/dt_4)$ и используя (13) находим:

$$\frac{da_4}{dt_3} = \frac{da_4}{dt_4}\Bigg/\sqrt{1 - \frac{(da_4/dt_4)^2}{c^2}}\,. \tag{17}$$

Величина $a_4(t_4)$ определяет в системе координат $K_4$ расстояние любого типичного наблюдателя до центра $3\mathbb{R}$-мира в момент времени $t_4$. Она является радиусом кривизны $3\mathbb{R}$-мира в системе координат $K_4$. Функция $a_4(t_4)$ описывает изменение радиуса кривизны $3\mathbb{R}$-мира в системе координат $K_4$. Кроме геометрического смысла, она имеет ещё и динамический. Величина $da_4/dt_4$ определяет скорость движения типичных наблюдателей в системе $K_4$. Функция $a_4(t_4)$ определяет динамику $3\mathbb{R}$-мира в этой системе. Например, расстояние между типичными наблюдателями в системе $K_4$ определяется формулой:

$$R(t_4) = \left(\frac{R_0}{a_m}\right) a_4(t_4), \tag{18}$$

где $R_0 = R_4(0)$.

Используя (6), формулу (17) записываем в виде:

$$\frac{da_4}{dt_3} = c\sqrt{\left(\frac{a_4}{a_m}\right)^2 - 1}. \tag{19}$$

Из (17) находим:

$$\left(\frac{da_4}{dt_3}\right)^2 = -c^2 + \frac{1}{3}\Lambda c^2 a_4^2, \tag{20}$$

$$\frac{d^2 a_4}{dt_3^2} = \frac{1}{3}\Lambda c^2 a_4, \tag{21}$$

где постоянная $\Lambda$ связана с размером $a_m$ формулой:

$$\Lambda = 3/a_m^2. \tag{22}$$

Система уравнений (20), (21) не является корректной, поскольку величина $t_3$, входящая в эти уравнения, определена в $K_3$, а величины $da_4$ и $a_4$ имеют определённый смысл в $K_4$.

Обычно, ссылаясь на инвариантность радиуса кривизны при переходе от одной системы координат к другой (см., например, [4, §111]), считают, что величина $a_4(t_4)$ является также и радиусом кривизны 3$\mathbb{R}$-мира в системе $K_3$ в момент времени $t_3$, связанный с $t_4$ формулой (16). Учитывая (8) и (16), полагают, что радиус кривизны в системе $K_3$ описывается функцией

$$a(t_3) = a_4(t_4(t_3)) = a_m \operatorname{ch} \frac{t_3}{t_m}. \tag{23}$$

Эта функция является решением уравнений

$$\left(\frac{da}{dt_3}\right)^2 = -c^2 + \frac{1}{3}\Lambda c^2 a^2, \tag{24}$$

$$\frac{d^2 a}{dt_3^2} = \frac{1}{3}\Lambda c^2 a^2, \tag{25}$$

с начальными условиями:

$$a(0) = a_m, \quad \frac{da}{dt_3}(0) = 0. \tag{26}$$

Уравнения (24), (25) могут быть получены из уравнений Эйнштейна с $\Lambda$-членом, если в последних формально положить $G = 0$, см., пункт 3.3.4. Кроме того необходимо считать, что 3$\mathbb{R}$-мир является замкнутым ($k = +1$).

Уравнения (24), (25) могут быть получены также из уравнений (20), (21), если в последних убрать значок «4». В «стандартном» выводе уравнений (24), (25), из уравнений Эйнштейна с $\Lambda$–членом, идея о дополнительном четвёртом пространственном измерении не используется. При этом не возникает и необходимости в использовании значка «4».

Уравнения (24), (25) описывают известную модель де-Ситтера (см., например, [1, 2]). Считается, что эта модель позволяет находить изменение радиуса кривизны $3\mathbb{R}$-мира в сопутствующей системе координат. Полагаем, что нет оснований считать, что функция $a(t_3)$, определяемая формулой (23), описывает динамику $3\mathbb{R}$-мира в сопутствующей системе координат $K_3$. Например, видно, что $da/dt_3 \to \infty$ при $t_3 \to \infty$. При этом очевидно, что функция $a(t_3)$, определяемая формулой (23), не может описывать движение каких либо объектов, а следовательно и динамику $3\mathbb{R}$-мира. Считаем, что использование преобразования (23), для описания динамики $3\mathbb{R}$–мира в системе $K_3$, приводящее к расходящимся экспоненциально растущим решениям, не является удачным.

С учётом идеи о четвёртом пространственном измерении, динамику $3\mathbb{R}$-мира целесообразно описывать функцией, определяющей расстояние от центра $3\mathbb{R}$-мира до типичных наблюдателей. В системе $K_4$ — это $a_4(t_4)$. В одномерной системе координат $K_{34}$ — это расстояние от типичного наблюдателя до центра этого мира. Оно описывается функцией $a_{34}(t_3)$.

Чтобы найти функцию $a_{34}(t_3)$ рассмотрим следующую задачу. Определим релятивистское равноускоренное движение, т.е. прямолинейное движение частицы, при котором остаётся постоянной величина ускорения $w$ в собственной (в каждый момент времени) системе отсчёта, связанной с частицей.

Приведем решение этой задачи взятое нами из [3, §7]. В системе отсчёта, в которой скорость частицы $v = 0$, компоненты 4-ускорения $w^i = d^2x^i/ds^2$ равны:

$$w^i = (0, w/c^2, 0, 0), \tag{27}$$

где $w$ — обычное трёхмерное ускорение, направленное вдоль оси $x$. Релятивистски инвариантное условие равноускоренности может быть представлено в виде постоянства 4-скаляра, совпадающего с $w^2$ в собственной системе отсчёта:

$$w_i w^i = const = -w^2/c^4. \tag{28}$$

В «неподвижной» системе отсчёта, относительно которой рассматривается движение, раскрытие выражения $w_i w^i$ приводит к уравнению:

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = w. \tag{29}$$

Интегрируем это уравнение с начальными условиями $v = 0$ при $t = 0$, получаем:

$$v(t) = \frac{wt}{\sqrt{1 + \frac{w^2t^2}{c^2}}}. \tag{30}$$

Интегрируя это уравнение ещё раз, и полагая $x = x_0 = c^2/w$ при $t = 0$, получаем:

$$x = \frac{c^2}{w}\sqrt{1 + \frac{w^2t^2}{c^2}}. \tag{31}$$

При $wt \ll c$ эти формулы переходят в классические выражения $v = wt,\ x = x_0 + wt^2/2$. При $wt \to \infty$ скорость стремится к постоянному значению $c$.

Собственное время равноускоренно движущейся частицы

$$t' = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{c}{w} \operatorname{arcsh} \frac{wt}{c}. \tag{32}$$

При $t \to \infty$ оно растёт по значительно более медленному чем $t$ закону

$$t' \sim \frac{c}{w} \ln \frac{2wt}{c}. \tag{33}$$

Целесообразность приведения подробного решения задачи о релятивистском равноускоренном движении частицы заключается в следующем. Сравнение решения (6), описывающего движение типичного наблюдателя в инерциальной системе $K_4$ и решения (31), описывающего равноускоренное движение частицы в инерциальной системе отсчёта, показывает, что они совпадают. Это означает, что движение типичного наблюдателя в системе координат $K_4$ можно трактовать как равноускоренное движение с постоянным (в каждый данный момент времени в собственной для него системе отсчёта $K_{34}$) ускорением:

$$w = c^2/a_m. \tag{34}$$

Величина этого ускорения определяется начальным состоянием $3\mathbb{R}$-мира. Ускорение тем больше, чем меньше минимальный размер $3\mathbb{R}$-мира $a_m$. Система координат $K_{34}$ является неинерциальной. Функция $a_4(t_4)$ описывает движение типичного наблюдателя в инерциальной системе $K_4$. При описании движения типичного наблюдателя в системе $K_4$ нет необходимости в описании метрических свойств системы координат $K_{34}$. Поэтому приведено лишь соотношение (16), определяющее взаимосвязь показаний часов типичного наблюдателя $t_3$ и показаний часов $t_4$ инерциальной системы отсчёта $K_4$ мимо которых типичный наблюдатель пролетает.

Функцию $a_{34}(t_3)$, описывающую движение центра $3\mathbb{R}$-мира относительно типичного наблюдателя, запишем в системе координат $K_{34}$, считая её неподвижной. При таком рассмотрении в системе координат $K_{34}$ существует гравитационное поле. Метки системы координат $K_4$ пролетают мимо типичного наблюдателя со скоростью $da_4/dt_4$. Эти метки в месте нахождения типичного наблюдателя имеют постоянное ускорение $w$.

Используя соображения симметрии считаем, что законы движения: а) типичного наблюдателя относительно центра $3\mathbb{R}$-мира в инерциальной системе $K_4$, б) центра $3\mathbb{R}$-мира относительно типичного наблюдателя в неподвижной системе $K_{34}$, являются тождественными. С учетом этого функцию $a_{34}(t_3)$ определяем формулой:

$$a_{34}(t_3) = \sqrt{a_m^2 + c^2 t_3^2}. \tag{35}$$

Каждому типичному наблюдателю системы $K_3$ соответствует своя линейная система координат $K_{34}$. Все типичные наблюдатели эквивалентны. Все линейные системы координат $K_{34}$ равноправны при описании движения центра $3\mathbb{R}$-мира. Функции $a_{34}(t_3)$, описывающие в этих системах движение центра $3\mathbb{R}$-мира, являются тождествеными.

Обозначим функцию $a_{34}(t_3)$ как $a_3(t_3)$. Эта функция является решением уравнений:

$$\left(\frac{da_3}{dt_3}\right)^2 = c^2 - 2\Delta(a_3), \tag{36}$$

$$\frac{d^2 a_3}{dt_3^2} = -\frac{d\Delta(a_3)}{da_3}, \tag{37}$$

где

$$\Delta(a_3) = \frac{c^2 a_m^2}{2a_3^2}. \tag{38}$$

В пункте 4 уравнения (36), (37) являются предельным случаем космологических уравнений А.А. Фридмана (см. уравнения (102), (103)). Они описывают в сопутствующей системе $K_3$ динамику $3\mathbb{R}$–мира, когда влияние гравитационного поля не является существенным. Это означает, что функция $a_{34}(t_3)$ описывает не только движение центра $3\mathbb{R}$–мира относительно любого типичного наблюдателя, но еще является и масштабным фактором этого мира в сопутствующей системе координат $K_3$.

В рассматриваемом здесь приближении динамика $3\mathbb{R}$-мира определяется лишь одним параметром – минимальным размером этого мира $a_m$. Величины $a_m$ и $a_m/c$ являются характерными пространственным и временным масштабами, соответственно. Силы отталкивания являются центробежными, геометрическими по своей природе. Так как функция $a_3(t_3)$ является масштабом длины в сопутствующей системе координат $K_3$, то расстояния между любыми типичными наблюдателями $R_3(t_3)$ в этой системе определяются формулой:

$$R_3(t_3) = R_3(0)a_3(t_3)/a_m. \tag{39}$$

Выполняется закон Хаббла:

$$\frac{dR_3}{dt_3} = H(t_3)R_3, \tag{40}$$

где параметр Хаббла

$$H(t_3) = \frac{1}{a_3(t_3)} \cdot \frac{da_3}{dt_3} = \frac{c^2 t_3}{a_m^2 + c^2 t_3^2}. \tag{41}$$

Графики функций $a_3(t_3)$, $da_3/dt_3$ и $d^2a_3/dt_3^2$ приведены на рис.1.

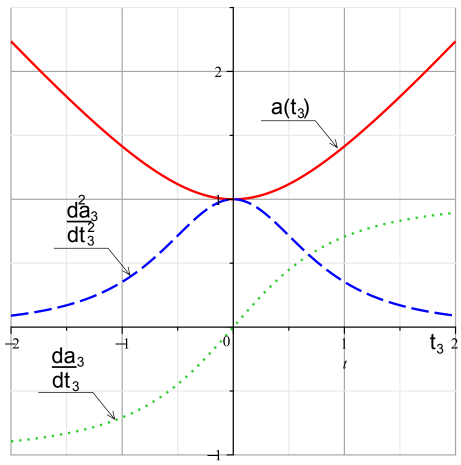


**Рис. 1.** Графики функций, описывающих изменение: масштабного фактора, скорости его изменения, а также космологического ускорения в 3ℝ–мире. Единицы измерения расстояния, времени и скорости: $a_m$, $t_m$ и $c$, соответственно.

Отметим, что в рассматриваемой нами модели горячего 3ℝ–мира, расширению этого мира предшествовало его сжатие до размера $a_m$.

В следующем разделе изложен метод введения центробежных космологических сил отталкивания в уравнения ОТО. Он аналогичен эйнштейновскому, связанному с введением в эти уравнения $\Lambda$-члена. Кратко опишем его суть.

# 3. ОБОБЩЁННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

## *3.1. Уравнения Эйнштейна*

В основе космологии лежит ОТО. Согласно этой теории четырехмерное пространство-время при наличии материи является неевклидовым. Метрические свойства пространства-времени описываются метрикой:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \tag{42}$$

Метрические коэффициенты $g_{ik}$ являются функциями четырех пространственно-временных координат $x_i = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Они связаны с распределением материи и характером движения частиц, её составляющих. Величиной, определяющей свойства материи, является тензор энергии-импульса $T_{ik}$. Взаимосвязь между компонентами метрического тензора $g_{ik}$ и тензора энергии-импульса $T_{ik}$ определяется уравнениями Эйнштейна:

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^k, \tag{43}$$

где $R_i^k$ — тензор Риччи, $R$ — его след, $\delta_i^k$ — символ Кронекера, см., например, [1–3].

В космологии космическую среду обычно описывают как непрерывную идеальную сплошную среду, записывая тензор энергии-импульса в форме:

$$T_i^k = (\varepsilon + P) u_i u^k - P \delta_i^k, \tag{44}$$

где $u_i$ — четырехмерная скорость макроскопического движения среды, $\varepsilon$ — плотность энергии, а $P$ — давление космической среды.

## *3.2. Геометрия однородной изотропной Вселенной*

При описании геометрии однородного, изотропного нестационарного трехмерного пространства Вселенной это пространство рассматриваем как однородную и изотропную трехмерную гиперповерхность в четырехмерном евклидовом пространстве.

Уравнение, описывающее нестационарную однородную и изотропную трехмерную гиперповерхность в четырехмерных декартовых координатах $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеет вид:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = k \cdot a^2(t). \tag{45}$$

Сигнатура $k$ принимает три значения: $k = +1, -1, 0$. При $k = 1$ реализуется случай пространства постоянной положительной кривизны. Значению $k = -1$ соответствует пространство отрицательной кривизны. Плоское пространство нулевой кривизны имеет место при $k = 0$. Точка $O = (0, 0, 0, 0)$ является центром Вселенной, а $\sqrt{k} \cdot a(t)$ — её радиусом. В нестационарной Вселенной радиус кривизны $a$ изменяется во времени. Запишем метрику пространств с $k = +1, -1, 0$ в отдельности.

Для описания геометрии Вселенной используем трёхмерную криволинейную систему координат — сопутствующую систему. Будем называть её также системой координат типичных наблюдателей. Временную координату выберем так, чтобы в сопутствующей системе координат, для любого типичного наблюдателя, интервал между двумя бесконечно близкими событиями, происходящими в точке где он находится, определялся формулой:

$$ds^2 = c^2 dt^2. \tag{46}$$

В силу равноправности всех типичных наблюдателей введенное так время будет одинаковым для всех этих наблюдателей, и поэтому его называют мировым временем.

При $k = 1$ пространство однородной и изотропной Вселенной является трехмерной гиперсферой. Используя четырехмерные сферические координаты $a, \chi, \theta, \varphi$ (см., например, [1, 3]), интервал между двумя бесконечно близкими событиями в сопутствующей системе координат записывают в виде:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(d\chi^2 + \sin^2\chi \left[\sin^2\theta (d\varphi)^2 + (d\theta)^2\right]\right). \tag{47}$$

Формулы, описывающие геометрию однородного пространства отрицательной кривизны, получаются из формул, описывающих сферическую Вселенную, если в них формально заменить $a \to ia$, $\chi \to i\chi$. При $k = -1$ уравнение (45) описывает трехмерную псевдосферу. Интервал между двумя бесконечно близкими событиями в сопутствующей системе координат, для псевдосферической Вселенной, записывается в виде:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi \left[\sin^2\theta (d\varphi)^2 + (d\theta)^2\right]\right). \tag{48}$$

Предельным является случай, когда радиус кривизны трехмерного пространства равен бесконечности. В этом случае пространство Вселенной является плоским (евклидовым). В процессе эволюции плоской Вселенной «вмороженная» в неё декартова система координат претерпевает однородную деформацию. Формально плоское пространство можно описывать как псевдосферическое, записывая $ds^2$ в виде:

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(d\chi^2 + \chi^2\left[\sin^2\theta(d\varphi)^2 + (d\theta)^2\right]\right). \tag{49}$$

Подробно о формулах (47) - (49) см., например, в [1, 3].

### *3.3. Космологические уравнения А.А. Фридмана*

Метрика однородного, изотропного пространства содержит лишь один скалярный параметр — радиус кривизны $a$. Он определяет кривизну пространства. Уравнения Эйнштейна для однородной, изотропной Вселенной могут быть преобразованы в космологические уравнения А.А. Фридмана, определяющие взаимосвязь радиуса кривизны и величин, описывающих термодинамические свойства космической среды.

При получении уравнений А.А. Фридмана используется сопутствующая система координат, относительно которой среда покоится, и поэтому компоненты четырехмерной скорости $u^i = (1, 0, 0, 0)$. Отличными от нуля оказываются следующие компоненты $T_i^k$:

$$T_0^0 = \varepsilon, \;\; T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P. \tag{50}$$

Используя выражения для интервала между двумя бесконечно близкими событиями (47), (48), (49), уравнения Эйнштейна (43) можно преобразовать к виду:

$$3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2}\right] = \frac{8\pi G}{c^2}\varepsilon, \tag{51}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}P. \tag{52}$$

Здесь и далее точка означает производную по времени $t$. Уравнения (51), (52) носят название космологических уравнений А. А. Фридмана. Подробности получения этих уравнений из уравнений Эйнштейна, см., например, в [1]. Уравнения (51), (52) могут быть преобразованы к виду:

$$\frac{d\varepsilon}{da} + 3(\varepsilon + P)\frac{1}{a} = 0, \tag{53}$$

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G\frac{a}{c^2}(\varepsilon + 3P). \tag{54}$$

В обычной космической среде $P > 0$ и согласно формуле (54), эффект влияния давления (тепловой энергии) заключается не в ускорении, а в замедлении скорости расширения Вселенной.

Точка зрения, что тепловая энергия может только замедлять расширение однородной Вселенной, является общепринятой (см, например, [1, гл.1.]). Идея о возможности влияния тепловой энергии в направлении увеличения скорости разлета однородной космической среды воспринимается отрицательно. Обычно считается, что поскольку в однородной среде нет градиентов давления, то, следовательно, нет и расталкивающих сил давления. Согласно уравнениям А.А. Фридмана (53), (54) тепловая энергия однородной, изотропной среды не может изменить знак гравитационного космологического ускорения, и как видно из (54), она может лишь усилить гравитацию. Отметим, что этот вывод получен из уравнений А.А. Фридмана, не учитывающих влияние на космическую среду космологических сил отталкивания. В разделе 2 настоящей работы в рамках упрощенной наглядной модели показано, что в однородной изотропной релятивистской Вселенной существенную роль играют центробежные космологические силы отталкивания. Они действуют во внешнем для Вселенной четвёртом пространственном измерении и растягивают её. В сопутствующей системе координат эти силы связанны с изменением тепловой энергии космической среды. Их влияние приводит к увеличению скорости разлета космической среды. Как видно из уравнения (54), эти силы в рамках стандартных уравнений Эйнштейна (43) не описываются. Для учета центробежных космологических сил отталкивания в уравнения ОТО необходимо добавить слагаемые, описывающие эти силы.

### *3.4. Уравнения Эйнштейна с $\Lambda$-членом*

Вариант уравнений ОТО, содержащий силы отталкивания был предложен Эйнштейном [11]. Он связан с введением в уравнения гравитационного поля $\Lambda$-члена. С учётом $\Lambda$-члена уравнения Эйнштейна имеют вид:

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^k + \delta_i^k \Lambda, \tag{55}$$

где $\Lambda$ — так называемая космологическая постоянная. В теории эта постоянная является универсальной. Считают, что её значение может быть найдено из сравнения предсказаний теории и наблюдений. Полагают, что $\Lambda \approx 10^{-56}$см$^{-2}$ [1, 9, 10].

Учёт эйнштейновских сил отталкивания, описываемых $\Lambda$-членом в уравнениях Эйнштейна, приводит к появлению в правых частях уравнений А.А. Фридмана (51) и (52) дополнительных слагаемых, и они принимают вид:

$$3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2}\right] = \frac{8\pi G}{c^2}\varepsilon + c^2\Lambda, \tag{56}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}P + c^2\Lambda. \tag{57}$$

Переход от (43) к (55) можно формально связать с заменой:

$$T_i^k \Rightarrow T_{i\,eff}^k = (\varepsilon_{eff} + P_{eff})u_i u^k - P_{eff}\delta_i^k, \tag{58}$$

$$\varepsilon \Rightarrow \varepsilon_{eff} = \varepsilon + \varepsilon_\Lambda, \quad P \Rightarrow P_{eff} = P + P_\Lambda, \tag{59}$$

где

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{c^4\Lambda}{8\pi G}, \quad P_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda. \tag{60}$$

Подробности см., например, в [9, гл.4.].

Часто считают, что величины $\varepsilon_\Lambda$ и $P_\Lambda$ являются добавками к $\varepsilon$ и $P$, связанными с существованием, кроме обычной космической среды, некоторой другой компоненты материи, называемой «тёмной энергией». Считают, что именно «тёмная энергия» и является источником сил отталкивания (см., например, [9, 10]).

Из уравнений (56), (57) легко получить формулу, определяющую космологическое ускорение, создаваемое эйнштейновскими силами отталкивания. Она имеет вид:

$$\ddot{a}_\Lambda = -\frac{4}{3}\pi G\frac{a}{c^2}\left(\varepsilon_\Lambda + 3P_\Lambda\right) = \frac{1}{3}\Lambda c^2 a, \tag{61}$$

см., [1, гл.4.].

Для эйнштейновских сил отталкивания, источниками которых являются величины $\varepsilon_\Lambda$ и $P_\Lambda$, важно, что $P_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda$, вследствие чего и возникают силы отталкивания. На это обычно обращается внимание. В тоже время, даже при $G = 0$, поле эйнштейновских сил отталкивания остается отличным от нуля (неустранимая кривизна) и, вследствие этого является независимой от гравитационного поля сущностью. Величины $\varepsilon_\Lambda$ и $P_\Lambda$ зависят от $G$. Введение этих величин для описания эйнштейновских сил отталкивания не является необходимым. Сложность использования уравнений Эйнштейна (55) на практике состоит в отсутствии понимания физической природы $\Lambda$-члена.

### *3.5. Обобщённые уравнения Эйнштейна для* $3\mathbb{R}$*-мира*

В уравнения ОТО, кроме эйнштейновских сил, связанных с $\Lambda$-членом, могут быть введены и другие космологические силы отталкивания [19].

Чтобы ввести эти силы в ОТО, рассмотрим модификацию уравнений Эйнштейна вида:

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi G}{c^4}T_i^k - \frac{8\pi\mathbb{C}}{c^4}Q_i^k, \tag{62}$$

где $\mathbb{C}$– некоторая постоянная. Будем называть эти уравнения обобщенными уравнениями Эйнштейна.

Тензор энергии–импульса космической серды $T_i^k$, определяется формулой (44) и является источником гравитационного поля. Тензор $Q_i^k$ определяем формулой:

$$Q_i^k = (\varepsilon_\Delta + P_\Delta)u_i u^k - P_\Delta \delta_i^k. \tag{63}$$

Считаем, что он является источником космологических сил отталкивания. Полагаем, что величины $\varepsilon_\Delta$ и $P_\Delta$ связаны со свойствами космической среды и таковы, что выполняется тождество:

$$Q_{i;k}^k \equiv 0. \tag{64}$$

Использование тензора $Q_i^k$, определяемого формулой (63) и удовлетворяющего условию (64), позволяет ввести в уравнения Эйнштейна дополнительные слагаемые, которые не нарушают ковариантности этих уравнений, а также содержащихся в них законов сохранения.

В случае однородной Вселенной $\varepsilon_\Delta$ и $P_\Delta$ определяем формулами:

$$\varepsilon_\Delta = \frac{3c^2}{4\pi\mathbb{C}}\frac{\Delta(a)}{a^2}\ , \quad P_\varepsilon = -\frac{c^2}{4\pi\mathbb{C}}\left(\frac{\Delta(a)}{a^2} + \frac{1}{a}\frac{d\Delta(a)}{da}\right), \tag{65}$$

где $\Delta(a)$ – некоторая функция радиуса кривизны Вселенной $a$. Величины $\varepsilon_\Delta$ и $P_\Delta$, также как и $\varepsilon$ и $P$, являются скалярными функциями. Легко проверить, что при любом выборе функции $\Delta(a)$ выполняется тождество: $Q_{i;k}^k \equiv 0$. Вследствие этого, законы сохранения $T_{i;k}^k = 0$, содержащиеся в стандартных уравнениях Эйнштейна, присутствуют и в уравнениях (62). Произвол в выборе функции $\Delta(a)$ позволяет связать силы отталкивания с определенными свойствами космической среды.

Уравнения Эйнштейна с $\Lambda$–членом являются частным случаем уравнений (62). В самом деле, если функцию $\Delta(a)$ выбрать в виде

$$\Delta(a) = \Delta\Lambda(a) = -\frac{1}{6}\Lambda c^2 a^2\ ,$$

то уравнения (62) оказываются уравнениями Эйнштейна с $\Lambda$–членом.

Учитывая (63), (65), уравнения (62) запишем в виде:

$$R_i^k - \frac{1}{2}R\delta_i^k = \frac{8\pi G}{c^4}T_i^k - \frac{2}{c^2a^2}\left[\left(3\Delta - \frac{d}{da}(a\Delta)\right)u_iu^k + \frac{d}{da}(a\Delta)\delta_i^k\right]. \tag{66}$$

Из обобщённых уравнений Эйнштейна стандартным образом получаем космологические уравнения А.А. Фридмана. Они запишутся в виде:

$$3\left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2}\right] = \frac{8\pi G}{c^2}\varepsilon - 6\frac{\Delta(a)}{a^2}, \tag{67}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}P - \frac{2}{a}\frac{d\Delta(a)}{da} - \frac{2\Delta(a)}{a^2}. \tag{68}$$

Эти уравнения названы в [19] обобщёнными уравнениями А.А. Фридмана.

К функции $\Delta(a)$ может быть добавлена произвольная константа. Выбор этой константы определяется начальными условиями (полной энергией Вселенной). Формально, добавление константы к $\Delta$-энергии означает, что в космологических уравнениях А.А. Фридмана параметр $k$ может принимать не только значения $(-1,\ 0, +1)$, но и другие.

Систему уравнений (67), (68) можно преобразовать к виду:

$$\frac{d\varepsilon}{da} + 3\left(\varepsilon + P\right)\frac{1}{a} = 0, \tag{69}$$

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G\frac{a}{c^2}\left(\varepsilon + 3P\right) - \frac{d\Delta(a)}{da}. \tag{70}$$

Уравнение (69) является первым началом термодинамики для однородной изотропной Вселенной. Считая, что расширение Вселенной является адиабатическим процессом (см., например, [1, 2]), первое начало термодинамики записываем в виде:

$$dE = d\left(\varepsilon V\right) = -P\,dV. \tag{71}$$

В однородной изотропной Вселенной $V \sim a^3$, поэтому (69) является следствием (71).

Для замыкания системы уравнений (69), (70) необходимо учесть уравнение, описывающее термодинамические свойства космической среды. В релятивистской Вселенной (3$\mathbb{R}$-мире) давление $P$ и плотность энергии $\varepsilon$ связаны соотношением:

$$P = \frac{1}{3}\varepsilon. \tag{72}$$

Учитывая (72), из (69) находим, что при любых $k$ и $\Delta(a)$ справедливо уравнение:

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + 4\frac{da}{a} = 0. \tag{73}$$

Отсюда заключаем, что в релятивистской Вселенной удельная энергия $\varepsilon$ и давление $P$ связаны с её радиусом кривизны соотношениями:

$$\varepsilon a^4 \sim Pa^4 = const. \tag{74}$$

Уравнение (70) описывает динамику 3$\mathbb{R}$–мира в сопутствующей системе координат. Первое слагаемое правой части этого уравнения определяет действие сил притяжения, второе – сил отталкивания. Источником сил отталкивания является «$\Delta$–энергия», описываемая функцией $\Delta(a)$. Условием возникновения сил отталкивания является наличие у космической среды «$\Delta$–энергии» и её убывание с ростом масштаба $a$ в 3$\mathbb{R}$–мире.

Как показано в пункте 2, источником сил отталкивания в идеализированном 3$\mathbb{R}$ мире,в котором не учитывается влияние гравитационного поля, является центробежная энергия излучения (см. формулы (36)- (38)). Предполагаем, что эта энергия является источником сил отталкивания в 3$\mathbb{R}$–мире также и при учете влияния гравитационных сил. «$\Delta$–энергию» в 3$\mathbb{R}$ мире определяем формулой:

$$\Delta(a) = \frac{c^2 a_m^2}{2a^2}. \tag{75}$$

Тензор энергии-импульса для излучения записываем в виде:

$$T_i^k = (\varepsilon + P)u_i u^k - \delta_i^k P = \frac{\varepsilon}{3}(4u_i u^k - \delta_i^k). \tag{76}$$

Используя формулы (63), (65), (75) и (76), слагаемые, описывающие в обобщённых уравнениях Эйнштейна (62) космологические силы отталкивания, записываем в виде:

$$\frac{8\pi\mathbb{C}}{c^4} Q_i^k = \frac{3}{\varepsilon_m a_m^2} T_i^k. \tag{77}$$

Константу центробежных космологических сил отталкивания $\mathbb{C}$ определяем формулой:

$$\mathbb{C} = \frac{3c^4}{8\pi\varepsilon_m a_m^2}. \tag{78}$$

В этом случае $Q_i^k = T_i^k$ и обобщенные уравнения Эйнштейна для 3$\mathbb{R}$-мира запишутся в виде:

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi}{c^4}(G - \mathbb{C})T_i^k. \tag{79}$$

Полагаем, что значение гравитационной $G$, как и постоянной космологических сил отталкивания $\mathbb{C}$, определяется начальным состоянием 3$\mathbb{R}$-мира. Эти константы могут быть различными по величине. 3$\mathbb{R}$–миры, в которых $G \geq \mathbb{C}$, порождены «Большим взрывом» и ускоренно расширяются. 3$\mathbb{R}$–миры в которых $\mathbb{C} > G$, приходят из бесконечности. Сначала они сжимаются до некоторого минимального размера, а затем ускоренно расширяясь снова уходят в бесконечность.

### *3.6. Обобщённые уравнения Эйнштейна для Вселенной*

Учитывая многокомпонентность космической среды, заполняющей Вселенную, для ее описания используем двухкомпонентное приближение. Полагаем, что среда состоит из двух однородно перемешанных компонент: нерелятивистской и релятивистской.

В нерелятивистскую компоненту включаются все составляющие космической среды, как наблюдаемые («барионная компонента»), так и пока не наблюдаемые («темная материя»), состоящие из частиц, масса покоя которых много больше их кинетической энергии. Нерелятивистская компонента является кластеризуемой и в настоящее время основной по массе/энергии частью космической среды. Влияние давления нерелятивистской компоненты на динамику Вселенной не существенно.

В релятивистскую компоненту включаем все составляющие космической среды, как наблюдаемые (реликтовое излучение), так и не наблюдаемые, уравнение состояния для которых $P = (1/3)\varepsilon$. Эта компонента состоит из частиц, масса покоя которых равна нулю либо много меньше их полной энергии. Считаем, что релятивистская составляющая не является кластеризуемой и ее распределение в пространстве является однородным. В настоящее время вклад релятивистской компоненты в полную массу/энергию космической среды является малым (см., например, [1, 2]). В тоже время в ранней Вселенной этот вклад был главным и именно релятивистская компонента определяла динамику Вселенной.

Отношение концентраций частиц нерелятивистской компоненты $n_M$ и релятивистской $n_{rad}$, за исключением самых ранних стадий эволюции Вселенной, остается постоянным. Согласно наблюдательным данным $n_{rad}/n_M \sim 10^9$. Значки $M$ и $rad$ используются, как это принято (см., например, [9]) для обозначения величин, описывающих нерелятивистскую и релятивистскую компоненты, соответственно.

Предполагаем, что источником космологических сил отталкивания во Вселенной, как и в $3\mathbb{R}$–мире, является центробежная энергия космической среды. Подавляющая часть этой энергии сосредоточена в однородно распределенной в пространстве релятивистской компоненте космической среды. Учитывая это, обобщённые уравнения Эйнштейна для Вселенной записываем в виде:

$$R_i^k - \frac{1}{2}R\delta_i^k = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{iM}^k + T_{irad}^k) - \frac{8\pi\mathbb{C}}{c^4}T_{irad}^k. \tag{80}$$

Постоянная $\mathbb{C}$ является константой центробежных космологических сил отталкивания во Вселенной. Значение этой константы определяется параметрами начального состояния Вселенной. Оно может быть найдено в процессе практического использования уравнений (80).

Влияние релятивистской компоненты космической среды на динамику Вселенной является определяющим в $RD$ (радиационно доминированную) эпоху. В эту эпоху эволюции Вселенной вклад релятивистской компоненты в полную энергию космической среды является главным (см., например, [1], [10]). Вследствие наличия последнего слагаемого в правой части уравнения (80), динамика Вселенной в $RD$–эпоху может принципиально отличаться от общепринятой. Например, может отсутствовать сингулярность в решениях, описывающих динамику Вселенной, а также иметь место её ускоренное расширение (подробности см. в пункте 5).

Влияние центробежной энергии на динамику нерелятивистской космической среды может быть также существенным. Обобщенные уравнения А.А. Фридмана для идеализированной однородной нерелятивистской Вселенной записаны в Приложении.

### *3.7. Обобщенные космологические уравнения А.А. Фридмана*

Используя обобщённые уравнения Эйнштейна (80), стандартным образом преобразуем их в космологические уравнения А.А. Фридмана. Для двухкомпонентной космической среды они могут быть записаны в виде:

$$3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k_0c^2}{a^2}\right) = 8\pi G(\rho_M + \rho_{rad}) - 8\pi\mathbb{C}\rho_{rad}, \tag{81}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k_0c^2}{a^2}\right) = -\frac{8}{3}\pi G\rho_{rad} + \frac{8}{3}\pi\mathbb{C}\rho_{rad}. \tag{82}$$

При получении этих уравнений пренебрегли тепловой энергией нерелятивистской компоненты космической среды. Считали, что $P_{rad} = (1/3)\varepsilon_{rad}$; плотности энергий $\varepsilon_M$ и $\varepsilon_{rad}$ связаны с $\rho_M$ и $\rho_{rad}$ уравнениями: $\varepsilon_M = \rho_M c^2$ , $\varepsilon_{rad} = \rho_{rad} c^2$; значение безразмерного параметра $k_0$ связано с начальными условиями эволюции Вселенной и определяется её полной энергией.

Уравнения (81), (82), можно преобразовать к виду:

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G a(\rho_M + \rho_{rad}) - \frac{4}{3}\pi \mathbb{C} a \rho_{rad}, \tag{83}$$

$$\frac{d}{da}(\varepsilon_M + \varepsilon_{rad}) + (3\varepsilon_M + 4\varepsilon_{rad})\frac{1}{a} = 0. \tag{84}$$

Уравнение (84) распадается на два уравнения:

$$\frac{d\rho_M}{da} + 3\rho_M \frac{1}{a} = 0, \tag{85}$$

$$\frac{d\rho_{rad}}{da} + 4\rho_{rad} \frac{1}{a} = 0. \tag{86}$$

Интегрируя эти уравнения, заключаем, что плотности нерелятивистской $\rho_M$ и релятивистской $\rho_{rad}$ компонент связаны с характерным размером Вселенной $a$ соотношениями:

$$\rho_M(a) = \rho_{M0}(a_0/a)^3 \ , \quad \rho_{rad}(a) = \rho_{rad0}(a_0/a)^4. \tag{87}$$

Здесь и далее значок ноль используется для обозначения параметров современной Вселенной.

Учитывая (87), обобщённые уравнения А.А. Фридмана (81), (82) запишем в виде:

$$\frac{1}{\bar{a}^2}\left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{t}}\right)^2 = k_0\frac{\Omega_{curv}}{\bar{a}^2} + \frac{\Omega_M}{\bar{a}^3} + \frac{\Omega_{rad}}{\bar{a}^4}(1 - \mathbb{C}/G), \tag{88}$$

$$\frac{d^2\bar{a}}{d\bar{t}^2} = -\frac{\Omega_M}{2\bar{a}^2} - \frac{\Omega_{rad}}{\bar{a}^3}(1 - \mathbb{C}/G), \tag{89}$$

где $\bar{a} = a/a_0$, $\bar{t} = t \cdot H_0$, $H_0$– постоянная Хаббла.

При записи уравнений (88), (89) используются стандартные обозначения [9]:

$$\Omega_M = \frac{\rho_{M\,0}}{\rho_c},\ \Omega_{rad} = \frac{\rho_{rad\,0}}{\rho_c},\ \Omega_{curv} = \frac{c^2}{H_0^2 a_0^2}. \tag{90}$$

Параметры $\Omega_M$ и $\Omega_{rad}$ определяют в единицах $\rho_c$ современные плотности нерелятивистской и релятивистской компонент космической среды, соответственно.

Безразмерный параметр $\Omega_{curv}$ определяется квадратом отношения характерной длины $cH_0^{-1}$ к масштабу $a_0$. Постоянную Хаббла часто записывают в виде: $H_0 = h \cdot 100\,$км/сМпк. В оценочных расчетах обычно полагают $h = 0.7$ [9]. Величина критической плотности $\rho_c$ определяется формулой:

$$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G = 1.88 \cdot 10^{-29} h^2 \text{г/см}^3. \tag{91}$$

Решения уравнений (88), (89) удовлетворяют начальным условиям:

$$\bar{a}(\bar{t_0}) = 1, \ (d\bar{a}/d\bar{t})(\bar{t_0}) = 1. \tag{92}$$

Считаем, что современной Вселенной соответствует момент времени $t = t_0$.

Параметрами уравнений (88), (89) и граничных условий (92) являются:

$$\Omega_M, \ \Omega_{rad}, \ \Omega_{curv}, \ k_0, \ h, \ \mathbb{C}/G. \tag{93}$$

Учитывая граничные условия (92), из (88) находим, что эти параметры связаны соотношением:

$$k_0\Omega_{curv} + \Omega_M + \Omega_{rad}(1 - \mathbb{C}/G) = 1. \tag{94}$$

В следующем разделе опишем простую космологическую модель Вселенной, в основе которой лежат уравнения (88) (89).

## 4. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ

В настоящей работе ограничимся исследованием решений уравнений (88), (89), описывающих динамику Вселенной без сингулярности.

Предположим, что вначале масштаб Вселенной имел минимальное значение $a_m$. Все компоненты космической среды находились в термодинамическом равновесии и имели температуру $T_m$. Плотности энергии релятивистской и нерелятивистской компонент этой среды были равными $\varepsilon_m$ и $E_m$, соответственно. Условие минимальности начального размера означает, что при $a = a_m$, $\dot{a}(a_m) = 0$. Учитывая это начальное состояние, обобщённые уравнения А.А. Фридмана (88), (89) запишем в виде:

$$\dot{a}^2 = c^2(1-\beta) - \frac{c^2 a_m^2}{a^2}(1-\beta) - c^2\beta\frac{E_m}{\varepsilon_m}\left(1 - \frac{a_m}{a}\right), \tag{95}$$

$$\ddot{a} = \frac{c^2 a_m^2}{a^3}(1-\beta) - \frac{1}{2}c^2\beta\frac{E_m}{\varepsilon_m}\frac{a_m}{a^2}. \tag{96}$$

Безразмерный параметр $\beta$ определяется формулой:

$$\beta = G/\mathbb{C} = \frac{8}{3}\pi G\frac{\varepsilon_m a_m^2}{c^4}. \tag{97}$$

Считаем, что температура $T_m$ была достаточно высокой, но ее значение было ограниченным. О разумности такого предположения см., например, §4 гл.6 [1]. Предполагаем, что в начальном состоянии Вселенной плотность энергии релятивистской компоненты $\varepsilon_m$ была много больше плотности энергии нерелятивистской компоненты $E_m$.

Плотность энергии $\varepsilon_m$ релятивистской компоненты, в предположении, что она состоит из фотонов и трех типов нейтрино, можно записать в виде [9]:

$$\varepsilon_m = 1.68 \cdot \sigma T_m^4, \tag{98}$$

где постоянная Стефана — Больцмана

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3\hbar^3}, \tag{99}$$

$k_B$ и $\hbar$ постоянные Больцмана и Планка, соответственно. С учётом (98), константу $\beta$ запишем в виде:

$$\beta = 10^{-62}T_m^4 a_m^2, \tag{100}$$

($T_m$ – в градусах, $a_m$ в сантиметрах).

Предположим, что предельное значение скорости расширения Вселенной близко к скорости света. Из уравнения (95) видно, что, при $E_m \ll \varepsilon_m$, это имеет место, если значение параметра $\beta \ll 1$. Учитывая (100), заключаем, что $\beta \ll 1$, если

$$a_m \ll 10^{31}/T_m^2. \tag{101}$$

Например, если $T_m = 3\cdot 10^{12}\ K$, то неравенство (101) выполняется при $a_m \ll 10^6$ см.

Из уравнений (95), (96) видно, что при значениях параметров $\beta \ll 1$ и $E_m \ll \varepsilon_m$, Вселенная за характероное время $t_m = a_m/c$ приобретает скорость разлета близкую к скорости света. Приближенно стадия выхода на расширение со скоростью света описывается уравнениями:

$$\dot{a}^2 = c^2 - \frac{c^2 a_m^2}{a^2}, \tag{102}$$

$$\ddot{a} = \frac{c^2 a_m^2}{a^3}. \tag{103}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (36)-(38), описывающими движение центра $3\mathbb{R}$–мира относительно любого типичного наблюдателя этого мира. Это означает, что функция $a_{34}(t_3)$, описывающая это движение, одновременно является и масштабным фактором $3\mathbb{R}$–мира.

Таким образом, если в начальном состоянии Вселенной температура $T_m$ была достаточно высокой, при этом выполнялось условие (101), то очень простая космологическая модель $3\mathbb{R}$-мира, описанная в разделе 2 настоящей работы, и далее называемая кинематической, возможно, является хорошим приближением для описания эволюции Вселенной. Кинематическая модель Вселенной содержит лишь два параметра — минимальный размер $a_m$, и максимальную температуру $T_m$. Задание температуры $T_m$ необходимо для описания изменения термодинамических параметров космической среды. Используем кинематическую модель для объяснения некоторых наблюдательных данных о динамике Вселенной.

## 5. ОБЪЯСНЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

- В кинематической модели изменение масштаба Вселенной в сопутствующей системе координат определяется формулой

$$a(t) = \sqrt{a_m^2 + c^2 t^2}. \tag{104}$$

- Согласно этой модели Вселенная очень быстро, за характерное время $t_m = a_m/c$, приобрела скорость разлета близкую к скорости света. Уже давно имеет место почти равномерное расширение Вселенной. Поэтому, по-видимому, не случайно хорошим приближением для описания её динамики является S-модель (модель равномерно расширяющейся Вселенной), предложенная в [19].

- Считая, что возраст Вселенной $t_0 \gg a_m/c$ и учитывая (104), из (41) получаем:

$$t_0 \approx H(t_0)^{-1} = H_0^{-1}. \tag{105}$$

Так как постоянная Хаббла $H_0 \approx 70$км/сМпк, то $t_0 \approx 14 \cdot 10^9$лет. Это дает правильную оценку возраста Вселенной. Масштаб современной Вселенной $a_0 \approx ct_0 \approx 10^{28}$см.

- Используя (104) находим формулу, определяющую в открытой Вселенной фотометрическое расстояние до типичных наблюдателей, имеющих красное смещение $z$:

$$\bar{r}(z) = \frac{r(z)}{cH_0^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{curv}}}\,\mathrm{sh}\int_0^z \frac{d\acute{z}}{(1+\acute{z})\sqrt{1-(a_m^2/a_0^2)(1+\acute{z})^2}}, \tag{106}$$

где

$$\Omega_{curv} = \frac{c^2}{a_0^2 H_0^2} = \frac{a_0^2}{a_0^2 - a_m^2}. \tag{107}$$

Подробности получения формулы (106) см., например, в гл.4 [9].

- Предполагая, что характерное время расширения $t_m$ много меньше возраста Вселенной в момент рекомбинации, считаем, что хорошее приближение для объяснения известных наблюдательных данных дают формулы:

$$a(t) = ct\ , \quad \Omega_{curv} = 1\ , \quad \bar{r}(z) = \mathrm{sh}\ln(1+z) = \frac{2z+z^2}{2(1+z)}. \tag{108}$$

- С учётом (108), формулу определяющую зависимость «видимая звездная величина — красное смещение» для объектов, имеющих определенную абсолютную светимость, запишем в виде:

$$(m-M)(z) = 5\lg\left(z+\frac{z^2}{2}\right) + 5\lg\left(\frac{cH_0^{-1}}{l_0}\right), \tag{109}$$

$l_0 = 10$пк (см., например, [19]). На рис.2 приведена функция $(m-M)(z)$, рассчитанная по формуле (109), и наблюдательные данные для сверхновых типа Ia, имеющих, предположительно, приблизительно одинаковые абсолютные светимости в максимуме их блеска. Видно, что функция (109) хорошо объясняет наблюдения.

- С учетом (108), формула, определяющая угловой размер (в градусах) наблюдаемого объекта, имеющего красное смещение $z$ и линейный размер $d$,может быть записана в виде:

$$\Delta\theta = \frac{2d(1+z)^2}{(2z+z^2)cH_0^{-1}}\frac{180}{\pi}, \tag{110}$$

(см., например, гл.4 [9]). Используя (110), находим, что объекты, имеющие линейные размеры $d$ и $z \gg 1$ видны под углом

$$\Delta\theta = \frac{2d}{cH_0^{-1}}\frac{180}{\pi}. \tag{111}$$

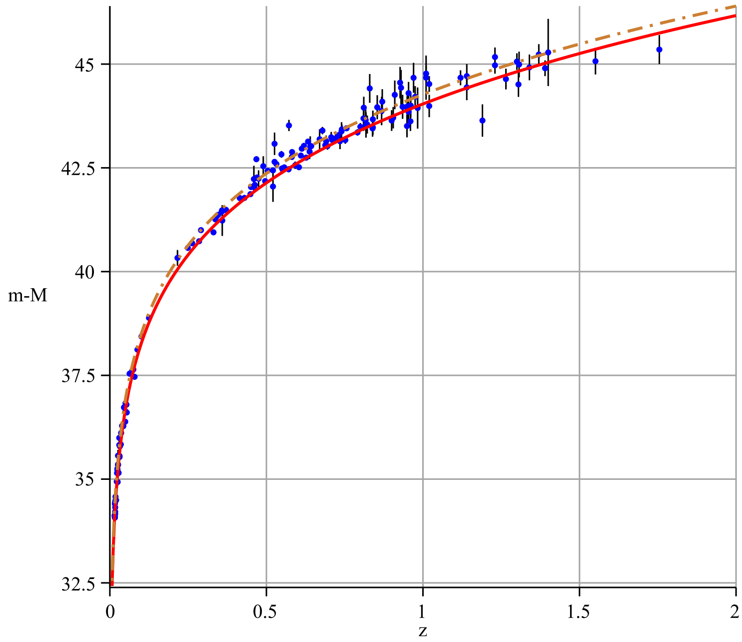


**Рис. 2.** Зависимость «видимая звёздная величина — красное смещение» $(m - M)(z)$ для объектов, имеющих определенную абсолютную светимость. Графики получены в кинематической модели (для $H_0 = 70$ км/с Мпк — сплошная линия; $H_0 = 63$ км/с Мпк — линия из точек и тире). Точками представлены наблюдаемые значения $(M - m)(z)$ для сверхновых типа Ia, вертикальные отрезки — ошибки их определения [6, 7].

- На равномерном фоне реликтового излучения наблюдаются яркие пятна, имеющие угловой размер приблизительно равный одному градусу (см., например, [8-10]). Учитывая (111), заключаем, что объекты, имеющие $z \gg 1$ и наблюдаемые под углом $\Delta\theta = 1^\circ$, имеют размер

$$d_1 = cH_0^{-1}\frac{\pi}{360} \approx 40\text{Мпк}. \tag{112}$$

  Этот размер, по-видимому, является максимальным размером неоднородностей, наблюдаемых во Вселенной, см., например, [1]. Если считать, что неоднородности являются гравитационно связанными системами и не подвержены космологическому расширению, то $d_1$ определяет линейный размер ярких пятен видимых на равномерном фоне реликтового излучения.

- Обычно линейные размеры наблюдаемых ярких пятен на равномерном фоне реликтового излучения связывают с размерами причинно связанных областей в момент рекомбинации. Момент рекомбинации $t_{rec}$ в кинематической модели Вселенной находим учитывая, что Вселенная расширяется равномерно и справедливо соотношение:

$$t_0/t_{rec} = T_{rec}/T_0. \tag{113}$$

Современное значение температуры реликтового излучения $T_0 \approx 3K$, а температура в момент рекомбинации $T_{rec} \approx 3 \cdot 10^3 K$. Используя (113), получим:

$$t_{rec} \approx 10^{-3} t_0 \approx 14 \cdot 10^6 \text{лет}. \tag{114}$$

Размер причинно связанных областей в момент рекомбинации оказывается равным:

$$d_{rec} = 2ct_{rec} \approx 28 \cdot 10^6 \text{св.лет} \approx 9\text{Мпк}. \tag{115}$$

- Размер $d_{rec}$ заметно меньше чем $d_1$. Это означает, что наблюдаемые яркие пятна на однородном фоне реликтового излучения появились существенно позднее, чем в момент рекомбинации. Неоднородности, имеющие размер $\approx 40$Мпк, могут иметь красные смещения $z$ не большие чем $200 \div 220$. Возможно, что отмеченное несоответствие между $d_1$ и $d_{rec}$ указывает на необходимость уточнения модели.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Чтобы качественно пояснить природу космологических сил отталкивания, рассмотрена динамика идеализированного изотропного трехмерного мира однородно заполненного излучением ($3\mathbb{R}$-мира). Считается, что $3\mathbb{R}$-мир состоит из свободно движущихся фотонов и погружен в четырехмерное плоское евклидово пространство. Вначале он имеет минимальный масштаб $a_m$ и максимальную температуру $T_m$.

2. Показано, что гипотеза о четвертом крупномасштабном пространственном измерении имеет важное следствие. Даже в случае свободного движения частиц, $3\mathbb{R}$-мир расширяется ускоренно. В рамках механики сплошной среды, это расширение можно рассматривать как происходящее под действием сил отталкивания. Эти силы являются центробежными по своей природе. Они действуют во внешнем для $3\mathbb{R}$-мира четвертом пространственном измерении и растягивают этот мир. Центробежные силы не влияют на термодинамические свойства космической среды.

3. Найдены уравнения, описывающие динамику $3\mathbb{R}$-мира, состоящего из свободно движущихся релятивистских частиц, в сопутствующей системе координат (уравнения

(36)- (38)). $3\mathbb{R}$-мир расширяется ускоренно это истолковывается как результат действия сил отталкивания. С ростом размера $3\mathbb{R}$-мира эти силы быстро уменьшаются. Амплитуда сил отталкивания $c^2/a_m$ тем больше, чем меньше минимальный размер $3\mathbb{R}$-мира $a_m$. При этом, чем меньше $a_m$, тем быстрее с ростом размера $3\mathbb{R}$-мира спадают силы отталкивания. При размерах заметно больших размера $a_m$ расширение $3\mathbb{R}$-мира происходит со скоростью близкой к скорости света. РОно описывается функцией:

$$a(t) = \sqrt{a_m^2 + c^2 t^2}. \qquad (116)$$

4. Показано, что центробежные силы в однородных изотропных безграничных гравитирующих средах не могут быть описаны в рамках стандартных уравнений ОТО. Для описания этих сил требуется обобщение уравнений Эйнштейна.

5. Высказана гипотеза, согласно которой источником космологических сил отталкивания во Вселенной является центробежная энергия космической среды. Подавляющая часть этой энергии сосредоточена в однородно распределенной в пространстве релятивистской компоненте космической среды. С учетом этого, записаны обобщенные уравнения Эйнштейна, учитывающие влияние центробежных сил на динамику Вселенной.

6. Записаны обобщенные космологические уравнения А.А. Фридмана, описывающие эволюцию однородной изотропной Вселенной с учетом влияния центробежной энергии космической среды. Исследованы решения этих уравнений, описывающие Вселенную без сингулярности и без расходимости скорости её расширения. Рассмотрен случай, когда асимпотическое значение скорости расширения равно скорости света. Приближено динамика Вселенной в этом случае описывается уравнением (116)

7. Предложена кинематическая космологическая модель Вселенной, описываемая уравнением (116). В этой модели предполагается, что вначале Вселенная имела минимальный размер $a_m$ и максимальную температуру $T_m$. Плотность энергии релятивистской компоненты космической среды была много больше плотности энергии ее нерелятивистской компоненты. Минимальный размер Вселенной $a_m$ был достаточно малым. Выполнялось условие (101).

8. Кинематическая космологическая модель Вселенной содержит лишь два параметра: минимальный размер Вселенной $a_m$ и ее максимальную температуру $T_m$. Согласно этой модели, Вселенная очень быстро, за характерное время $t_m = a_m/c$, приобрела скорость разлета близкую к скорости света. При $a \gg a_m$, хорошим приближением для

описания её эволюции является модель равномерно расширяющейся Вселенной.

9. Использование кинематической модели для объяснения некоторых важных наблюдательных данных о динамике Вселенной показывает следующее.

- Модель правильно объясняет возраст Вселенной.
- Она дает простое объяснение наблюдаемой зависимости «видимая звездная величина — красное смещение для сверхновых типа Ia».
- Модель позволяет высказать определенные суждения о характерных размерах и времени появления наблюдаемых неоднородностей на равномерном фоне реликтового излучения.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают глубокую благодарность И.Г. Шухману за многочисленные полезные обсуждения, решаемой в настоящей работе задачи. Мы благодарны А.Г. Жилкину и А. Френкелю за ценные советы и полезные замечания.

## 7. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ВСЕЛЕННАЯ

Рассмотрим следующую идеализированную систему. Однородное и изотропное пространство однородно заполнено гравитирующим нерелятивистским одноатомным идеальным газом. Используя обобщенные космологические уравнения А. А. Фридмана, а также уравнения, описывающие термодинамические свойства идеального газа, изучим динамику этой системы.

В стандартных космологических уравнениях А. А. Фридмана (51), (52) присутствуют слагаемые, описывающие кинетическую энергию радиального движения космической среды $\sim \dot{a}^2$, но отсутствуют аналогичные по форме слагаемые, описывающие энергию ее теплового движения. Для описания динамики нерелятивистской вселенной используем обобщенные уравнения А.А. Фридмана (67), (68). Предполагаем, что описание энергий радиального и теплового движения космической среды в этих уравнениях должно быть однотипным. Такое описание может быть достигнуто, если функцию $\Delta(a)$ взять в виде:

$$\Delta(a) = \frac{1}{2}v^2(a) - \frac{1}{2}c^2(k + k_0), \tag{117}$$

где $v^2(a)/2$ – энергия теплового движения единицы массы космической среды. Выбор константы $k_0$ определяется начальными условиями.

С учетом (117) обобщенные космологические уравнения А. А. Фридмана запишутся в виде:

$$3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k_0\,c^2}{a^2}\right) = \frac{8\pi G}{c^2}\varepsilon - \frac{3\,v^2}{a^2}, \tag{118}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k_0\,c^2}{a^2}\right) = -\frac{8\pi G}{c^2}P - \frac{1}{a}\frac{dv^2}{da} - \frac{v^2}{a^2}. \tag{119}$$

Дифференцируя уравнение (118) по $t$, находим:

$$\ddot{a} = \frac{4\pi G}{3\,c^2}\frac{d}{da}\left(\varepsilon\,a^2\right) - \frac{1}{2}\frac{dv^2}{da}. \tag{120}$$

Из уравнения (118), (119), получаем:

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\frac{\pi G\,a}{c^2}(\varepsilon + 3\,P) - \frac{1}{2}\frac{dv^2}{da}. \tag{121}$$

Видно, что тепловая энергия является не только одним из источников гравитационного поля, что учитывается за счет зависимости $\varepsilon$ и $P$ от $v^2$, но одновременно и причиной сил отталкивания.

Приравнивая (120), (121), заключаем, что при любом виде функции $v^2(a)$ и значении параметра $k$ справедливо уравнение, описывающее закон сохранения энергии космической среды в адиабатическом процессе:

$$\frac{d\varepsilon}{da} + 3(\varepsilon + P)\frac{1}{a} = 0. \tag{122}$$

Для нерелятивистского одноатомного газа вид зависимости $v^2(a)$ вполне определенный и является следствием уравнения (122). Для одноатомного идеального нерелятивистского газа справедливы формулы:

$$\varepsilon = n\,m_0c^2 + \frac{1}{2}n\,m_0v^2 = \varepsilon_0 + \varepsilon_k, \tag{123}$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2}n\,m_0v^2 = \frac{3}{2}n\,k_BT,\ P = n\,k_BT = \frac{2}{3}\varepsilon_k, \tag{124}$$

где $n$ – концентрация частиц, $\varepsilon_k$ – тепловая энергия единицы объема, $T$ – температура, $P$ – давление идеального газа, $k_B$ – постоянная Больцмана.

Легко показать, что уравнение (122) распадается на два:

$$\frac{dn}{da} + 3\,n\frac{1}{a} = 0, \tag{125}$$

$$\frac{d\varepsilon_k}{da} + \frac{5\,\varepsilon_k}{a} = 0. \tag{126}$$

Уравнение (125) является законом сохранения числа частиц. Из него следует:

$$n\,a^3 = const = n_0 a_0^3. \tag{127}$$

Уравнение (126) описывает закон сохранения тепловой энергии в адиабатическом процессе. Интегрируя (126), находим:

$$\varepsilon_k a^5 = const. \tag{128}$$

Так как $\varepsilon_k \sim n\,v^2$, то с учетом (127), из (128) получаем:

$$v^2 a^2 = const = L_0^2 = v_0^2 a_0^2. \tag{129}$$

С учетом малости параметра $v^2/c^2$, уравнение (121) упрощается и принимает вид:

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G a \rho - \frac{1}{2}\frac{dv^2}{da}. \tag{130}$$

Используя (127) и (129), уравнение (130) запишем в виде:

$$\ddot{a} = -\frac{GM_0}{a^2} + \frac{L_0^2}{a^3} = -\frac{dU_{eff}}{da}, \tag{131}$$

где

$$U_{eff} = -\frac{GM_0}{a} + \frac{L_0^2}{2a^2}, \tag{132}$$

$$M_0 = M(a) = \frac{4}{3}\pi\rho a^3 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a_0^3. \tag{133}$$

График функции $U_{eff}(a)$ изображен на рис. 3. Величины $M_0$ и $L_0^2$ являются параметрами рассматриваемой идеализированной нерелятивистской вселенной.

Первым интегралом уравнения (131) является энергия:

$$E = \frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{GM_0}{a} + \frac{L_0^2}{2a^2}. \tag{134}$$

Энергия $E$ и параметр $k_0$ связаны соотношением $E = k_0 c^2/2$.

Уравнение (134) является законом сохранения энергии нерелятивистской космической среды. В отличие от соответствующего закона сохранения «стандартных» уравнений А.А. Фридмана, в уравнении (134) учитывается, что изменение кинетической энергии радиального движения космической среды происходит не только за счет изменения потенциальной энергии, но и за счет изменения энергии теплового движения.

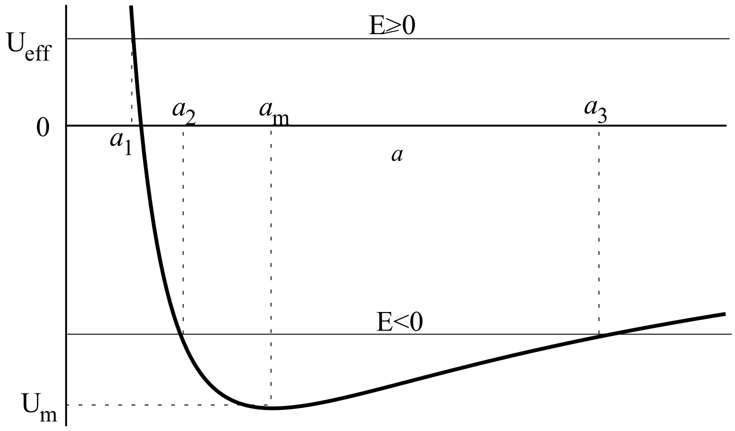


**Рис. 3.** График функции $U_{eff}(a)$, определяемой формулой (132).

Энергия теплового движения среды $v^2/2$, в рассматриваемой нами задаче, является одновременно и центробежной энергией. Справедливо соотношение:

$$v^2/2 = L_0^2/2a^2. \tag{135}$$

Уравнение (131) отличается от «стандартного» уравнения А.А. Фридмана, для нерелятивистской среды, наличием в правой части уравнения слагаемого $L_0^2/a^3$, описывающего действие на космическую среду центробежных сил. Существование этих сил обусловлено наличием у среды тепловой энергии.

Уравнение (131) аналогично уравнению, описывающему радиальное движение единичной массы, имеющей вращательный момент $L = L_0$, в гравитационном поле точечной массы $M_0$. В зависимости от того $E < 0$ или $E \geq 0$, принципиально различными являются решения, описывающие динамику вселенной.

При $E < 0$, нерелятивистская идеализированная вселенная является замкнутой и осциллирующей Она описывается решениями типа а) (см. рис. 4.), имеет конечный объем и массу.

При $E \geq 0$, вселенная является открытой. Эволюцию такой вселенной описывают инфинитные решения типа б) (см. рис.4.)

При выполнении «начального» условия:

$$a_0 = a_s = \frac{L_0^2}{GM_0}, \ \dot{a}(0) = 0 \tag{136}$$

реализуется стационарное решение $a = a_s$ ( тип с), см. рис. 4.). Вселенная при этом является замкнутой, имеет конечный объем $V = 2\pi^2 a_s^3$. Стационарное состояние нерелятивистской вселенной является гравитационно устойчивым.

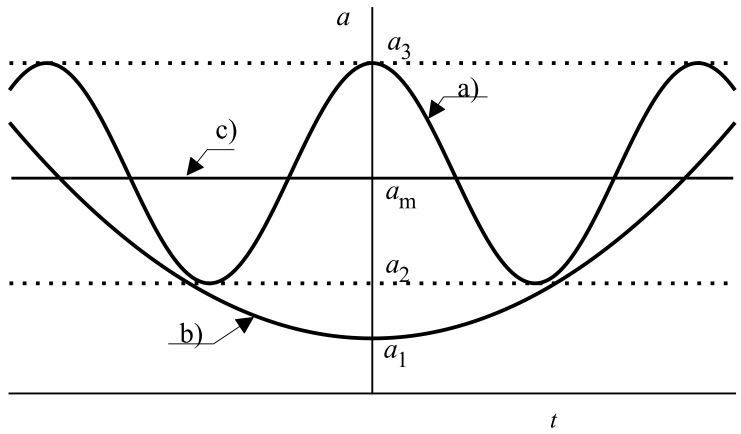


**Рис. 4.** Возможные типы решений уравнения (131), описывающее: a)—осциллирующую Вселенную ($E < 0$); b)—открытую Вселенную ($E \geq 0$); c)—стационарную Вселенную ($E = U_m$).

В нерелятивистской вселенной с $L_0 \neq 0$ отсутствует сингулярное состояние. В этой вселенной «Большой взрыв» может иметь место лишь при $L_0 = 0$.

Условия $E < 0$ и $E \geq 0$ можно записать в виде, который обычно используется в космологии, а именно: $E < 0 \Rightarrow \rho_0 > \rho_c$, $E \geq 0 \Rightarrow \rho_0 \leq \rho_c$, соответственно. В рассматриваемой здесь модели роль критической плотности играет величина

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G}\left(H_0^2 + \frac{L_0^2}{a_0^4}\right). \tag{137}$$

Из этой формулы видно, что центробежные космологические силы существенно влияют на значение критической плотности.

---


1. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. «Строение и эволюция Вселенной» (М.: Наука, 1975).
2. Вайнберг С. «Гравитация и космология» (М.: Платон, 2000).
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Теория поля» М.:Наука 1988.
4. S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, et al.,Astrophys. J. 517, 565 (1999).
5. A. G. Riess, A.V. Filippenko, P. Challis, et al.,Astron. J. 116, 1009 (1998).
6. P. Astier, J. Guy, N. Regnault, et al.,Astron.and Astrophys. 447, 31 (2006).

7. A. G. Riess, L.G. Strolger, S. Casertano, et al., Astrophys. J. 656, 98 (2007); e-Print arXiv: astro- ph/0611572 (2006)
8. G. Hinshaw, M.R. Nolta, C.L. Bennett, et al., Astrophys. J. Suppl. Ser. 170, 377 (2007).
9. Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков, «Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего большого взрыва». (М., 2008).
10. А.Д. Чернин «Тёмная энергия и всемирное антитяготение» УФН 178 267, №3 2008г.
11. Эйнштейн А. «Вопросы космологии и общая теория относительности» Собрание научных трудов Т.1 (М.: Наука, 1965).
12. А.М. Черепащук, А.Д. Чернин «Современная космология – наука об эволюции Вселенной», Бюллетень РАН «В защиту науки» №4, 2008.
13. Глиннер Э.Б. «Раздувающаяся Вселенная и вакуумоподобное состояние физической среды» УФН 172 221 №2 (2002).
14. А.Г. Жилкин, В.А. Клименко, акад. РАН А.М. Фридман «Об эйнштейновских силах отталкивания» Доклады Академии Наук, т435, №6 (2010).
15. А.Г. Жилкин, В.А. Клименко, А.М. Фридман «Динамика трёхмерных однородных изотропных релятивистских миров» Астрономический журнал (2010).
16. Randal L., Sunrum R., Phys. Rev. Let., 83, 4690-4693 (1999).
17. Maatrens., Living Reviews in Relativity, 7, №7 (2004).
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Механика» М.:Наука 1965.
19. А.В. Клименко, В.А. Клименко, А.М. Фридман «О равномерном расширении Вселенной» Астрономический Журнал, т.87, №10, с.947-966 (2010)